

ANALIZA 2, KOŁOKWIUM nr **9**, **13.06.2024**, godz. 9:15–12:00

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **91.**

Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie k , dla których szereg o wyrazach zespolonych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^k + 1}}{n^{10 + i}}$$

jest zbieżny. Pierwiastek w liczniku jest dodatnim pierwiastkiem z liczby rzeczywistej.

Zadanie **92.**

Dany jest taki ciąg (a_n) o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 \leq 25 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^5 \leq 256.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \leq C,$$

gdzie $C = 80$ (wersja łatwiejsza) lub $C = 77$ (wersja trudniejsza).

Zadanie **93.**

Korzystając ze wzorów

$$-\ln(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad |z| \leq 1, z \neq 1$$

oraz

$$\ln z = \ln |z| + i \cdot \arg z \quad \arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

obliczyć sumę szeregu o wyrazach zespolonych

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n},$$

gdzie

$$w = \frac{1 + i \cdot \sqrt{3}}{2}.$$

Zadanie **94.**

Dowieść, że liczba

$$\frac{\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^5 + 1}}{\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^5 + 32}}$$

jest całkowita. Zbieżność całek przyjąć bez dowodu.

Zadanie **95.**

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos x \cdot \cos 5x \, dx,$$

gdzie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n + 8}.$$

Zadanie **96.**

Dowieść, że jeżeli szereg

$$\sum_{n=2024}^{\infty} a_n$$

o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=2024}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{n} \cdot \ln n}$$

też jest zbieżny.

Zadanie **97.**

Podać przykład takiego zbieżnego szeregu

$$\sum_{n=2024}^{\infty} a_n$$

o wyrazach dodatnich, że szereg

$$\sum_{n=2024}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{n} \cdot \ln n}$$

jest rozbieżny.

Zadanie **98.**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^4 + 1}.$$