

**Kolokwium 8**

Wersja testu **A** 13 czerwca 2024 r.

**ANALIZA 2**

13 czerwca 2024 r., godz. 9:15-12:00

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

**Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.**

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

**Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry  
NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.**

1. Dla danych  $m, n$  podaj pole figury

$$\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \wedge x^m \leq y \leq \sqrt[n]{x}\}.$$

a)  $m = 2, n = 5$ , pole = .....      b)  $m = 5, n = 2$ , pole = .....

c)  $m = 4, n = 9$ , pole = .....      d)  $m = 9, n = 4$ , pole = .....

2. Podaj wartość całki oznaczonej.

a)  $\int_{-1}^7 ||x-1|-1| dx = \dots\dots\dots$       b)  $\int_{-3}^3 ||x-1|-1| dx = \dots\dots\dots$

c)  $\int_{-1}^5 ||x-1|-1| dx = \dots\dots\dots$       d)  $\int_{-1}^3 ||x-1|-1| dx = \dots\dots\dots$

3. Podaj wartość całki oznaczonej.

a)  $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[6]{21x+1}} = \dots\dots\dots$       b)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{63x+1}} = \dots\dots\dots$

c)  $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[6]{7x+1}} = \dots\dots\dots$       d)  $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[6]{9x+1}} = \dots\dots\dots$

4. Niech  $C(a, b) = \int_a^b \frac{dx}{x \cdot \ln x}$ . Podaj w postaci zawierającej **co najwyżej jeden symbol "ln"**.

a)  $C(49, 7^{22}) = \dots\dots\dots$       b)  $C(2, 8^8) = \dots\dots\dots$

c)  $C(\sqrt{5}, 5^5) = \dots\dots\dots$       d)  $C(\sqrt[7]{3}, 3^{11}) = \dots\dots\dots$

5. Podaj wartość całki oznaczonej, gdzie  $\{.\}$  oznacza część ułamkową.

a)  $\int_0^1 \{x\}^4 - \{x\}^9 dx = \dots\dots\dots$       b)  $\int_{33}^{35} \{x\}^4 - \{x\}^9 dx = \dots\dots\dots$

c)  $\int_{11}^{31} \{x\}^4 - \{x\}^9 dx = \dots\dots\dots$       d)  $\int_{44}^{49} \{x\}^4 - \{x\}^9 dx = \dots\dots\dots$

6. Podaj wartość całki oznaczonej.

a)  $\int_0^{20} \sqrt{40x - x^2} dx = \dots\dots\dots$       b)  $\int_0^{20} \sqrt{20x - x^2} dx = \dots\dots\dots$

c)  $\int_0^{10} \sqrt{20x - x^2} dx = \dots\dots\dots$       d)  $\int_{10}^{20} \sqrt{20x - x^2} dx = \dots\dots\dots$

7. Podaj wartość granicy.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt[5]{\frac{k}{n^6}} = \dots\dots\dots$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt[5]{\frac{k^2}{n^7}} = \dots\dots\dots$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt[5]{\frac{k^4}{n^9}} = \dots\dots\dots$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt[5]{\frac{k^3}{n^8}} = \dots\dots\dots$$

8. Podaj wartość granicy.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{7n} \frac{k}{k^2 + n^2} = \dots\dots\dots$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{k}{k^2 + n^2} = \dots\dots\dots$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{k}{k^2 + n^2} = \dots\dots\dots$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{k^2 + n^2} = \dots\dots\dots$$

9. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru  $p$ , dla których podany szereg jest zbieżny.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p-25)^n}{n^2}, \dots\dots\dots$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p-25)^n}{\sqrt{n}}, \dots\dots\dots$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} (2p-23)^n, \dots\dots\dots$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p-23)^n}{n}, \dots\dots\dots$$

**10.** Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru  $p$ , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

$$\text{a) } \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}}{\sqrt{x^{65} + x^{20}}} dx, \dots\dots\dots \quad \text{b) } \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}}{\sqrt{x^{20} + x^{10}}} dx, \dots\dots\dots$$

$$\text{c) } \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}}{\sqrt{x^{14} + x^6}} dx, \dots\dots\dots \quad \text{d) } \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}}{\sqrt{x^{17} + x^8}} dx, \dots\dots\dots$$

**11.** Podaj wartość całki oznaczonej.

$$\text{a) } \int_1^9 \frac{dx}{x^2 + 9x} = \dots\dots\dots \quad \text{b) } \int_1^6 \frac{dx}{x^2 + 2x} = \dots\dots\dots$$

$$\text{c) } \int_1^3 \frac{dx}{x^2 + 3x} = \dots\dots\dots \quad \text{d) } \int_1^5 \frac{dx}{x^2 + 5x} = \dots\dots\dots$$

**12.** Dla danej liczby naturalnej  $n$  podaj taką liczbę wymierną  $w$ , że  $\arctg(n) + \arctg w = \arctg(n+5)$ .

$$\text{a) } n=2, \quad w = \dots\dots\dots \quad \text{b) } n=3, \quad w = \dots\dots\dots$$

$$\text{c) } n=4, \quad w = \dots\dots\dots \quad \text{d) } n=1, \quad w = \dots\dots\dots$$

13. Podaj wartość całki oznaczonej.

a)  $\int_0^1 x^5 \cdot (x^6 + 1)^4 dx = \dots\dots\dots$

b)  $\int_0^1 x^{10} \cdot (x^{11} + 1)^6 dx = \dots\dots\dots$

c)  $\int_0^1 x^2 \cdot (x^3 + 1)^3 dx = \dots\dots\dots$

d)  $\int_0^1 x^6 \cdot (x^7 + 1)^5 dx = \dots\dots\dots$

14. Podaj wartość całki oznaczonej.

a)  $\int_{-1}^0 \sqrt[9]{x^{81} + x^{72}} dx = \dots\dots\dots$

b)  $\int_{-1}^0 \sqrt[3]{x^9 + x^6} dx = \dots\dots\dots$

c)  $\int_{-1}^0 \sqrt[7]{x^{49} + x^{42}} dx = \dots\dots\dots$

d)  $\int_{-1}^0 \sqrt[5]{x^{25} + x^{20}} dx = \dots\dots\dots$

15. Podaj normę supremum funkcji  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zdefiniowanej podanym wzorem.

a)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 40x + 523}$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

b)  $f(x) = \frac{1}{x^{16} - 40x^8 + 556}$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

c)  $f(x) = \frac{1}{x^4 + 40x^2 + 534}$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

d)  $f(x) = \frac{1}{x^8 + 40x^4 + 545}$ ,  $\|f\| = \dots\dots\dots$

16. Niech

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{n^k}$$

oraz

$$C(n) = \int_0^{2\pi} f_n^2(x) dx$$

Wówczas:

a)  $C(40) = \dots\dots\dots$                       b)  $C(20) = \dots\dots\dots$

c)  $C(10) = \dots\dots\dots$                       d)  $C(30) = \dots\dots\dots$

## Kolokwium 8

Wersja testu **A** 13 czerwca 2024 r.