

Kolokwium 8

Wersja testu **A** 13 czerwca 2024 r.

ANALIZA 2

13 czerwca 2024 r., godz. 9:15-12:00

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

**Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry
NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.**

Kolokwium 8Wersja testu **A** 13 czerwca 2024 r.

1. Dla danych m, n podaj pole figury

$$\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \wedge x^m \leq y \leq \sqrt[n]{x}\}.$$

a) $m = 2, n = 5, \text{ pole} = \mathbf{1/2}$

b) $m = 5, n = 2, \text{ pole} = \mathbf{1/2}$

c) $m = 4, n = 9, \text{ pole} = \mathbf{7/10}$

d) $m = 9, n = 4, \text{ pole} = \mathbf{7/10}$

2. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_{-1}^7 ||x-1|-1| dx = \mathbf{14}$

b) $\int_{-3}^3 ||x-1|-1| dx = \mathbf{6}$

c) $\int_{-1}^5 ||x-1|-1| dx = \mathbf{6}$

d) $\int_{-1}^3 ||x-1|-1| dx = \mathbf{2}$

3. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[6]{21x+1}} = \mathbf{62/35}$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[6]{63x+1}} = \mathbf{62/105}$

c) $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[6]{7x+1}} = \mathbf{186/35}$

d) $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[6]{9x+1}} = \mathbf{62/15}$

4. Niech $C(a, b) = \int_a^b \frac{dx}{x \cdot \ln x}$. Podaj w postaci zawierającej **co najwyżej jeden symbol "ln"**.

a) $C(49, 7^{22}) = \mathbf{\ln 11}$

b) $C(2, 8^8) = \mathbf{\ln 24}$

c) $C(\sqrt{5}, 5^5) = \mathbf{\ln 10}$

d) $C(\sqrt[7]{3}, 3^{11}) = \mathbf{\ln 77}$

5. Podaj wartość całki oznaczonej, gdzie $\{.\}$ oznacza część ułamkową.

a) $\int_0^1 \{x\}^4 - \{x\}^9 dx = \mathbf{1/10}$

b) $\int_{33}^{35} \{x\}^4 - \{x\}^9 dx = \mathbf{1/5}$

c) $\int_{11}^{31} \{x\}^4 - \{x\}^9 dx = \mathbf{2}$

d) $\int_{44}^{49} \{x\}^4 - \{x\}^9 dx = \mathbf{1/2}$

6. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_0^{20} \sqrt{40x - x^2} dx = \mathbf{100\pi}$

b) $\int_0^{20} \sqrt{20x - x^2} dx = \mathbf{50\pi}$

c) $\int_0^{10} \sqrt{20x - x^2} dx = \mathbf{25\pi}$

d) $\int_{10}^{20} \sqrt{20x - x^2} dx = \mathbf{25\pi}$

Kolokwium 8Wersja testu **A** 13 czerwca 2024 r.

7. Podaj wartość granicy.

a)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt[5]{\frac{k}{n^6}} = \mathbf{5/6}$$

b)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt[5]{\frac{k^2}{n^7}} = \mathbf{5/7}$$

c)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt[5]{\frac{k^4}{n^9}} = \mathbf{5/9}$$

d)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt[5]{\frac{k^3}{n^8}} = \mathbf{5/8}$$

8. Podaj wartość granicy.

a)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{7n} \frac{k}{k^2 + n^2} = \mathbf{\ln 5}$$

b)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{k}{k^2 + n^2} = \mathbf{\frac{\ln 13}{2}}$$

c)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{k}{k^2 + n^2} = \mathbf{\frac{\ln 2}{2}}$$

d)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{k^2 + n^2} = \mathbf{\frac{\ln 5}{2}}$$

9. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny.

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p-25)^n}{n^2}, \mathbf{[6, 13/2]}$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p-25)^n}{\sqrt{n}}, \mathbf{[12, 13]}$$

c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (2p-23)^n, \mathbf{(11, 12)}$$

d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p-23)^n}{n}, \mathbf{[11/2, 6]}$$

10. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p , dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a)
$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}}{\sqrt{x^{65} + x^{20}}} dx, \quad (9, 21)$$

b)
$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}}{\sqrt{x^{20} + x^{10}}} dx, \quad (4, 6)$$

c)
$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}}{\sqrt{x^{14} + x^6}} dx, \quad (2, 4)$$

d)
$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^{3p} + x^{2p}}}{\sqrt{x^{17} + x^8}} dx, \quad (3, 5)$$

11. Podaj wartość całki oznaczonej.

a)
$$\int_1^9 \frac{dx}{x^2 + 9x} = \frac{\ln 5}{9}$$

b)
$$\int_1^6 \frac{dx}{x^2 + 2x} = \ln(3/2)$$

c)
$$\int_1^3 \frac{dx}{x^2 + 3x} = \frac{\ln 2}{3}$$

d)
$$\int_1^5 \frac{dx}{x^2 + 5x} = \frac{\ln 3}{5}$$

12. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w , że $\arctg(n) + \arctg w = \arctg(n+5)$.

a) $n=2, \quad w=1/3$

b) $n=3, \quad w=1/5$

c) $n=4, \quad w=5/37$

d) $n=1, \quad w=5/7$

13. Podaj wartość całki oznaczonej.

$$\text{a) } \int_0^1 x^5 \cdot (x^6 + 1)^4 dx = \mathbf{31/30}$$

$$\text{b) } \int_0^1 x^{10} \cdot (x^{11} + 1)^6 dx = \mathbf{127/77}$$

$$\text{c) } \int_0^1 x^2 \cdot (x^3 + 1)^3 dx = \mathbf{5/4}$$

$$\text{d) } \int_0^1 x^6 \cdot (x^7 + 1)^5 dx = \mathbf{3/2}$$

14. Podaj wartość całki oznaczonej.

$$\text{a) } \int_{-1}^0 \sqrt[9]{x^{81} + x^{72}} dx = \mathbf{1/10}$$

$$\text{b) } \int_{-1}^0 \sqrt[3]{x^9 + x^6} dx = \mathbf{1/4}$$

$$\text{c) } \int_{-1}^0 \sqrt[7]{x^{49} + x^{42}} dx = \mathbf{1/8}$$

$$\text{d) } \int_{-1}^0 \sqrt[5]{x^{25} + x^{20}} dx = \mathbf{1/6}$$

15. Podaj normę supremum funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 40x + 523}$, $\|f\| = \mathbf{1/123}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^{16} - 40x^8 + 556}$, $\|f\| = \mathbf{1/156}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^4 + 40x^2 + 534}$, $\|f\| = \mathbf{1/534}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^8 + 40x^4 + 545}$, $\|f\| = \mathbf{1/545}$

16. Niech

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{n^k}$$

oraz

$$C(n) = \int_0^{2\pi} f_n^2(x) dx$$

Wówczas:

a) $C(40) = \pi/\mathbf{1599}$

b) $C(20) = \pi/\mathbf{399}$

c) $C(10) = \pi/\mathbf{99}$

d) $C(30) = \pi/\mathbf{899}$

Kolokwium 8

Wersja testu **A** 13 czerwca 2024 r.