Kolokwium 7 Wersja testu **A** 5 czerwca 2024 r.

ANALIZA 2 5 czerwca 2024 r., godz. 14:15-15:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Punktacja za zadanie **9** będzie liczona **podwójnie.**

Zadania **10 i 11** to zadania dodatkowe z punktacją liczoną **podwójnie.**

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 7 Wersja testu **A** 5 czerwca 2024 r.

1. Dla danej liczby n podaj pole figury

$$\left\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1\ \wedge\ x^n\leqslant y\leqslant \sqrt[n]{x}\right\}.$$

a) $n=3$, pole$=\mathbf{1/2}$ b) $n=5$, pole$=\mathbf{2/3}$

c) $n=9$, pole$=\mathbf{4/5}$ d) $n=10$, pole$=\mathbf{9/11}$

2. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{44}+x^{20}}}\,dx$, $(\mathbf{18,21})$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{40}+x^{10}}}\,dx$, $(\mathbf{8,19})$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{16}+x^{7}}}\,dx$, $(\mathbf{5,7})$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{12}+x^{6}}}\,dx$, $(\mathbf{4,5})$

3. Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $\displaystyle f(x)=\frac{1}{x^4+20x^2+134}$, $\|f\|=\mathbf{1/134}$

b) $\displaystyle f(x)=\frac{1}{x^2+20x+123}$, $\|f\|=\mathbf{1/23}$

c) $\displaystyle f(x)=\frac{1}{x^{16}-20x^8+156}$, $\|f\|=\mathbf{1/56}$

d) $\displaystyle f(x)=\frac{1}{x^8+20x^4+145}$, $\|f\|=\mathbf{1/145}$

4. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{4n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{27e/256}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{e/4}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^{2n}}{n^n}$, $R=\boldsymbol{\sqrt{e}/2}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{3n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{4e/27}$

5. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2p-17)^n$, $(\mathbf{8, 9})$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3p-17)^n}{n}$, $[\mathbf{16/3, 6})$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2p-19)^n}{\sqrt{n}}$, $[\mathbf{9, 10})$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3p-19)^n}{n^2}$, $[\mathbf{6, 20/3}]$

6. Podaj wartość granicy.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{k^5+n^5}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{5}}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{k^4+n^4}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{4}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{2}}$ d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^3+n^3}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{3}}$

7. Podaj wartość granicy.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn^2}{k^4+n^4}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{8}}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2n^3}{k^6+n^6}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4n^5}{k^{10}+n^{10}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}}$ d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3n^4}{k^8+n^8}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{16}}$

8. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że $\operatorname{arctg}(2n)+\operatorname{arctg} w=\operatorname{arctg}(3n)$.

a) $n=5$, $w=\mathbf{5/151}$

b) $n=3$, $w=\mathbf{3/55}$

c) $n=2$, $w=\mathbf{2/25}$

d) $n=1$, $w=\mathbf{1/7}$

9. Niech $f_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{n^k}$ oraz $C(n)=\int_0^{2\pi} f_n^2(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(9)=\boldsymbol{\pi/80}$

b) $C(7)=\boldsymbol{\pi/48}$

c) $C(5)=\boldsymbol{\pi/24}$

d) $C(8)=\boldsymbol{\pi/63}$

10. Niech $f_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k\cdot\cos kx}{n^k}$ oraz $C(m,n)=\int_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(9,11)=\boldsymbol{4\pi/95}$

b) $C(7,11)=\boldsymbol{4\pi/73}$

c) $C(3,5)=\boldsymbol{4\pi/11}$

d) $C(5,7)=\boldsymbol{4\pi/31}$

11. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n\cdot n}=\mathbf{ln(9/8)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\cdot n}=\mathbf{ln(3/2)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\cdot n}=\mathbf{ln(4/3)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n\cdot n}=\mathbf{ln(8/7)}$

Kolokwium 7 Wersja testu **B** 5 czerwca 2024 r.

ANALIZA 2 5 czerwca 2024 r., godz. 14:15-15:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Punktacja za zadanie **9** będzie liczona **podwójnie.**

Zadania **10 i 11** to zadania dodatkowe z punktacją liczoną **podwójnie.**

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 7 Wersja testu **B** 5 czerwca 2024 r.

1. Dla danej liczby n podaj pole figury

$$\left\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1\ \wedge\ x^n\leqslant y\leqslant \sqrt[n]{x}\right\}.$$

a) $n=9$, pole $=\mathbf{4/5}$

b) $n=5$, pole $=\mathbf{2/3}$

c) $n=3$, pole $=\mathbf{1/2}$

d) $n=10$, pole $=\mathbf{9/11}$

2. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{12}+x^6}}\,dx$, $(\mathbf{4,5})$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{16}+x^7}}\,dx$, $(\mathbf{5,7})$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{44}+x^{20}}}\,dx$, $(\mathbf{18,21})$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{40}+x^{10}}}\,dx$, $(\mathbf{8,19})$

3. Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^{16}-20x^8+156}$, $\|f\|=\mathbf{1/56}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^{4}+20x^2+134}$, $\|f\|=\mathbf{1/134}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^{2}+20x+123}$, $\|f\|=\mathbf{1/23}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^{8}+20x^4+145}$, $\|f\|=\mathbf{1/145}$

4. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{4n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{27e/256}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{3n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{4e/27}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^{2n}}{n^n}$, $R=\sqrt{\mathbf{e}}\mathbf{/2}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{e/4}$

5. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3p-19)^n}{n^2}$, $[\mathbf{6,\ 20/3}]$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3p-17)^n}{n}$, $[\mathbf{16/3,\ 6})$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2p-19)^n}{\sqrt{n}}$, $[\mathbf{9,\ 10})$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2p-17)^n$, $(\mathbf{8,\ 9})$

6. Podaj wartość granicy.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{k^4+n^4}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{4}}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^3+n^3}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{3}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{k^5+n^5}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{5}}$ d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{2}}$

7. Podaj wartość granicy.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn^2}{k^4+n^4}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{8}}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2n^3}{k^6+n^6}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3n^4}{k^8+n^8}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{16}}$ d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4n^5}{k^{10}+n^{10}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}}$

8. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że $\operatorname{arctg}(2n)+\operatorname{arctg}w=\operatorname{arctg}(3n)$.

a) $n=1,\ \ w=\mathbf{1/7}$

b) $n=3,\ \ w=\mathbf{3/55}$

c) $n=2,\ \ w=\mathbf{2/25}$

d) $n=5,\ \ w=\mathbf{5/151}$

9. Niech $f_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{n^k}$ oraz $C(n)=\int_0^{2\pi} f_n^2(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(7)=\boldsymbol{\pi/48}$

b) $C(8)=\boldsymbol{\pi/63}$

c) $C(5)=\boldsymbol{\pi/24}$

d) $C(9)=\boldsymbol{\pi/80}$

10. Niech $f_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k\cdot\cos kx}{n^k}$ oraz $C(m,n)=\int_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(5,7)=\boldsymbol{4\pi/31}$

b) $C(9,11)=\boldsymbol{4\pi/95}$

c) $C(7,11)=\boldsymbol{4\pi/73}$

d) $C(3,5)=\boldsymbol{4\pi/11}$

11. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{8/7})$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{9/8})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{4/3})$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{3/2})$

Kolokwium 7 Wersja testu **C** 5 czerwca 2024 r.

ANALIZA 2 5 czerwca 2024 r., godz. 14:15-15:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Punktacja za zadanie **9** będzie liczona **podwójnie.**

Zadania **10 i 11** to zadania dodatkowe z punktacją liczoną **podwójnie.**

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 7 Wersja testu **C** 5 czerwca 2024 r.

1. Dla danej liczby n podaj pole figury

$$\left\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1\ \wedge\ x^n\leqslant y\leqslant \sqrt[n]{x}\right\}.$$

a) $n=9$, pole $=\mathbf{4/5}$

b) $n=3$, pole $=\mathbf{1/2}$

c) $n=10$, pole $=\mathbf{9/11}$

d) $n=5$, pole $=\mathbf{2/3}$

2. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{44}+x^{20}}}\,dx$, $(\mathbf{18,\ 21})$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{16}+x^{7}}}\,dx$, $(\mathbf{5,\ 7})$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{12}+x^{6}}}\,dx$, $(\mathbf{4,\ 5})$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{40}+x^{10}}}\,dx$, $(\mathbf{8,\ 19})$

3. Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+20x+123}$, $\|f\|=\mathbf{1/23}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^4+20x^2+134}$, $\|f\|=\mathbf{1/134}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^{16}-20x^8+156}$, $\|f\|=\mathbf{1/56}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^8+20x^4+145}$, $\|f\|=\mathbf{1/145}$

4. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{4n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{27e/256}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^{2n}}{n^n}$, $R=\boldsymbol{\sqrt{e}/2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{3n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{4e/27}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n}$, $R=\mathbf{e/4}$

5. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2p-19)^n}{\sqrt{n}}$, $\mathbf{[9,\ 10)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2p-17)^n$, $\mathbf{(8,\ 9)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3p-19)^n}{n^2}$, $\mathbf{[6,\ 20/3]}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3p-17)^n}{n}$, $\mathbf{[16/3,\ 6)}$

6. Podaj wartość granicy.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{k^4+n^4}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{4}}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^3+n^3}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{3}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{k^5+n^5}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{5}}$ d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{2}}$

7. Podaj wartość granicy.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2n^3}{k^6+n^6}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3n^4}{k^8+n^8}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{16}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn^2}{k^4+n^4}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{8}}$ d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4n^5}{k^{10}+n^{10}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}}$

8. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że $\operatorname{arctg}(2n)+\operatorname{arctg} w=\operatorname{arctg}(3n)$.

a) $n=5$, $w=\mathbf{5/151}$

b) $n=3$, $w=\mathbf{3/55}$

c) $n=2$, $w=\mathbf{2/25}$

d) $n=1$, $w=\mathbf{1/7}$

9. Niech $f_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{n^k}$ oraz $C(n)=\int\limits_0^{2\pi} f_n^2(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(7)=\boldsymbol{\pi/48}$

b) $C(9)=\boldsymbol{\pi/80}$

c) $C(5)=\boldsymbol{\pi/24}$

d) $C(8)=\boldsymbol{\pi/63}$

10. Niech $f_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k\cdot\cos kx}{n^k}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(3,5)=\boldsymbol{4\pi/11}$

b) $C(9,11)=\boldsymbol{4\pi/95}$

c) $C(7,11)=\boldsymbol{4\pi/73}$

d) $C(5,7)=\boldsymbol{4\pi/31}$

11. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{9/8})$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{4/3})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{3/2})$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{8/7})$

Kolokwium 7 Wersja testu **D** 5 czerwca 2024 r.

ANALIZA 2 5 czerwca 2024 r., godz. 14:15-15:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Punktacja za zadanie **9** będzie liczona **podwójnie.**

Zadania **10 i 11** to zadania dodatkowe z punktacją liczoną **podwójnie.**

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 7 Wersja testu **D** 5 czerwca 2024 r.

1. Dla danej liczby n podaj pole figury

$$\left\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1\ \wedge\ x^n\leqslant y\leqslant \sqrt[n]{x}\right\}.$$

a) $n=3$, pole $=\mathbf{1/2}$

b) $n=10$, pole $=\mathbf{9/11}$

c) $n=5$, pole $=\mathbf{2/3}$

d) $n=9$, pole $=\mathbf{4/5}$

2. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{44}+x^{20}}}\,dx$, $(\mathbf{18,\,21})$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{12}+x^{6}}}\,dx$, $(\mathbf{4,\,5})$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{40}+x^{10}}}\,dx$, $(\mathbf{8,\,19})$

d) $\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{16}+x^{7}}}\,dx$, $(\mathbf{5,\,7})$

3. Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\frac{1}{x^{16}-20x^8+156}$, $\|f\|=\mathbf{1/56}$

b) $f(x)=\frac{1}{x^{4}+20x^2+134}$, $\|f\|=\mathbf{1/134}$

c) $f(x)=\frac{1}{x^{8}+20x^4+145}$, $\|f\|=\mathbf{1/145}$

d) $f(x)=\frac{1}{x^{2}+20x+123}$, $\|f\|=\mathbf{1/23}$

4. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{4n}{n} \cdot n! \cdot x^n}{n^n}$, $R = \mathbf{27e/256}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n} \cdot n! \cdot x^n}{n^n}$, $R = \mathbf{4e/27}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot x^n}{n^n}$, $R = \mathbf{e/4}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot n! \cdot x^{2n}}{n^n}$, $R = \sqrt{\mathbf{e}}/\mathbf{2}$

5. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p-19)^n}{\sqrt{n}}$, $[\mathbf{9, 10})$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (2p-17)^n$, $(\mathbf{8, 9})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3p-17)^n}{n}$, $[\mathbf{16/3, 6})$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3p-19)^n}{n^2}$, $[\mathbf{6, 20/3}]$

6. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{k^4+n^4} = \frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{4}}$ b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{3}}$

c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^4}{k^5+n^5} = \frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{5}}$ d) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2} = \frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{2}}$

7. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^4 n^5}{k^{10}+n^{10}} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}}$ b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 n^3}{k^6+n^6} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}$

c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3 n^4}{k^8+n^8} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{16}}$ d) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k n^2}{k^4+n^4} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{8}}$

8. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że $\operatorname{arctg}(2n)+\operatorname{arctg} w=\operatorname{arctg}(3n)$.

a) $n=5,\quad w=\mathbf{5/151}$

b) $n=3,\quad w=\mathbf{3/55}$

c) $n=2,\quad w=\mathbf{2/25}$

d) $n=1,\quad w=\mathbf{1/7}$

9. Niech $f_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{n^k}$ oraz $C(n)=\int\limits_0^{2\pi} f_n^2(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(9)=\boldsymbol{\pi/80}$

b) $C(5)=\boldsymbol{\pi/24}$

c) $C(7)=\boldsymbol{\pi/48}$

d) $C(8)=\boldsymbol{\pi/63}$

10. Niech $f_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k\cdot\cos kx}{n^k}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(5,7)=\boldsymbol{4\pi/31}$

b) $C(3,5)=\boldsymbol{4\pi/11}$

c) $C(9,11)=\boldsymbol{4\pi/95}$

d) $C(7,11)=\boldsymbol{4\pi/73}$

11. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{9/8})$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{8/7})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{3/2})$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{4/3})$

Kolokwium 7 Wersja testu **E** 5 czerwca 2024 r.

ANALIZA 2 5 czerwca 2024 r., godz. 14:15-15:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Punktacja za zadanie **9** będzie liczona **podwójnie.**

Zadania **10 i 11** to zadania dodatkowe z punktacją liczoną **podwójnie.**

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 7 Wersja testu **E** 5 czerwca 2024 r.

1. Dla danej liczby n podaj pole figury

$$\left\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1 \ \wedge\ x^n\leqslant y\leqslant \sqrt[n]{x}\right\}.$$

a) $n=5$, pole$=\mathbf{2/3}$

b) $n=3$, pole$=\mathbf{1/2}$

c) $n=9$, pole$=\mathbf{4/5}$

d) $n=10$, pole$=\mathbf{9/11}$

2. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{16}+x^7}}\,dx$, $(\mathbf{5},\mathbf{7})$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{40}+x^{10}}}\,dx$, $(\mathbf{8},\mathbf{19})$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{12}+x^6}}\,dx$, $(\mathbf{4},\mathbf{5})$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{44}+x^{20}}}\,dx$, $(\mathbf{18},\mathbf{21})$

3. Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^8+20x^4+145}$, $\|f\|=\mathbf{1/145}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^4+20x^2+134}$, $\|f\|=\mathbf{1/134}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^{16}-20x^8+156}$, $\|f\|=\mathbf{1/56}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+20x+123}$, $\|f\|=\mathbf{1/23}$

Kolokwium 7 Wersja testu **E** 5 czerwca 2024 r.

4. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^{2n}}{n^n}$, $R=\boldsymbol{\sqrt{e}/2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{3n}{n}\cdot n!\cdot x^{n}}{n^n}$, $R=\mathbf{4e/27}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{4n}{n}\cdot n!\cdot x^{n}}{n^n}$, $R=\mathbf{27e/256}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^{n}}{n^n}$, $R=\mathbf{e/4}$

5. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3p-17)^n}{n}$, $[\mathbf{16/3,\ 6})$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3p-19)^n}{n^2}$, $[\mathbf{6,\ 20/3}]$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2p-17)^n$, $(\mathbf{8,\ 9})$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2p-19)^n}{\sqrt{n}}$, $[\mathbf{9,\ 10})$

6. Podaj wartość granicy.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^3+n^3}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{3}}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{k^4+n^4}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{4}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{k^5+n^5}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{5}}$ d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}=\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{2}}$

7. Podaj wartość granicy.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn^2}{k^4+n^4}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{8}}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4n^5}{k^{10}+n^{10}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3n^4}{k^8+n^8}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{16}}$ d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2n^3}{k^6+n^6}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}$

8. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że $\operatorname{arctg}(2n)+\operatorname{arctg} w=\operatorname{arctg}(3n)$.

a) $n=2,\ \ w=\mathbf{2/25}$

b) $n=1,\ \ w=\mathbf{1/7}$

c) $n=3,\ \ w=\mathbf{3/55}$

d) $n=5,\ \ w=\mathbf{5/151}$

9. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{n^k}$ oraz $C(n)=\int\limits_0^{2\pi} f_n^2(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(5)=\boldsymbol{\pi/24}$

b) $C(8)=\boldsymbol{\pi/63}$

c) $C(7)=\boldsymbol{\pi/48}$

d) $C(9)=\boldsymbol{\pi/80}$

10. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k\cdot\cos kx}{n^k}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(5,7)=\boldsymbol{4\pi/31}$

b) $C(3,5)=\boldsymbol{4\pi/11}$

c) $C(9,11)=\boldsymbol{4\pi/95}$

d) $C(7,11)=\boldsymbol{4\pi/73}$

11. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{8/7})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{9/8})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{3/2})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{4/3})$

Kolokwium 7 Wersja testu **F** 5 czerwca 2024 r.

ANALIZA 2 5 czerwca 2024 r., godz. 14:15-15:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Punktacja za zadanie **9** będzie liczona **podwójnie.**

Zadania **10 i 11** to zadania dodatkowe z punktacją liczoną **podwójnie.**

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 7 Wersja testu **F** 5 czerwca 2024 r.

1. Dla danej liczby n podaj pole figury

$$\left\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1\ \wedge\ x^n\leqslant y\leqslant \sqrt[n]{x}\right\}.$$

a) $n=10$, pole $=\mathbf{9/11}$

b) $n=9$, pole $=\mathbf{4/5}$

c) $n=3$, pole $=\mathbf{1/2}$

d) $n=5$, pole $=\mathbf{2/3}$

2. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{40}+x^{10}}}\,dx$, $(\mathbf{8,\ 19})$

b) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{12}+x^{6}}}\,dx$, $(\mathbf{4,\ 5})$

c) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{44}+x^{20}}}\,dx$, $(\mathbf{18,\ 21})$

d) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x^{2p}+x^p}}{\sqrt{x^{16}+x^{7}}}\,dx$, $(\mathbf{5,\ 7})$

3. Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^{16}-20x^8+156}$, $\|f\|=\mathbf{1/56}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^{2}+20x+123}$, $\|f\|=\mathbf{1/23}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^{8}+20x^4+145}$, $\|f\|=\mathbf{1/145}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^{4}+20x^2+134}$, $\|f\|=\mathbf{1/134}$

4. Podaj promień zbieżności szeregu potęgowego.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{3n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n},\quad R=\mathbf{4e/27}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n},\quad R=\mathbf{e/4}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{4n}{n}\cdot n!\cdot x^n}{n^n},\quad R=\mathbf{27e/256}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot n!\cdot x^{2n}}{n^n},\quad R=\mathbf{\sqrt{e}/2}$

5. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2p-19)^n}{\sqrt{n}},\ [\mathbf{9,\ 10})$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3p-17)^n}{n},\ [\mathbf{16/3,\ 6})$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2p-17)^n,\ (\mathbf{8,\ 9})$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3p-19)^n}{n^2},\ [\mathbf{6,\ 20/3}]$

6. Podaj wartość granicy.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}=\frac{\mathbf{ln\,2}}{\mathbf{2}}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{k^5+n^5}=\frac{\mathbf{ln\,2}}{\mathbf{5}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{k^4+n^4}=\frac{\mathbf{ln\,2}}{\mathbf{4}}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^3+n^3}=\frac{\mathbf{ln\,2}}{\mathbf{3}}$

7. Podaj wartość granicy.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3n^4}{k^8+n^8}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{16}}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2n^3}{k^6+n^6}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4n^5}{k^{10}+n^{10}}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn^2}{k^4+n^4}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{8}}$

8. Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę wymierną w, że $\operatorname{arctg}(2n)+\operatorname{arctg} w=\operatorname{arctg}(3n)$.

a) $n=2,\ \ w=\mathbf{2/25}$

b) $n=5,\ \ w=\mathbf{5/151}$

c) $n=1,\ \ w=\mathbf{1/7}$

d) $n=3,\ \ w=\mathbf{3/55}$

9. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{n^k}$ oraz $C(n)=\int\limits_0^{2\pi} f_n^2(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(7)=\boldsymbol{\pi/48}$

b) $C(9)=\boldsymbol{\pi/80}$

c) $C(8)=\boldsymbol{\pi/63}$

d) $C(5)=\boldsymbol{\pi/24}$

10. Niech $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k\cdot\cos kx}{n^k}$ oraz $C(m,n)=\int\limits_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$. Wówczas:

a) $C(3,5)=\boldsymbol{4\pi/11}$

b) $C(9,11)=\boldsymbol{4\pi/95}$

c) $C(5,7)=\boldsymbol{4\pi/31}$

d) $C(7,11)=\boldsymbol{4\pi/73}$

11. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{8/7})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{3/2})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{9/8})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\cdot n}=\mathbf{ln}(\mathbf{4/3})$