KOLOKWIUM nr 6, 15.05.2024, godz. 14:15–15:45

Zadanie **9. (10 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{n\cdot(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}\,.$$

Po wymnożeniu prawej równości stronami przez $n\cdot(n+2)$ otrzymujemy

$$1 = A(n+2) + Bn\,.$$

Dla $n=0$ otrzymujemy $A=1/2$, natomiast przyjęcie $n=-2$ daje $B=-1/2$.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{N-3}-\frac{1}{N-1}\right)+\left(\frac{1}{N-2}-\frac{1}{N}\right)+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right)\,,$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do $3/4$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $3/4$.

Zadanie **10. (10 punktów)**
Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\cdot(x+3)\cdot(x+7)}\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\ln p$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x\cdot(x+3)\cdot(x+7)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x+7}\,,$$

$$1=A\cdot(x+3)\cdot(x+7)+B\cdot x\cdot(x+7)+C\cdot x\cdot(x+3)\,.$$

Podstawiamy[1] za x wartości 0, -3 i -7 otrzymując odpowiednio

dla $x=0$ $\quad 1=21\cdot A,$ skąd $A=1/21,$

dla $x=-3$ $\quad 1=-12\cdot B,$ skąd $B=-1/12,$

dla $x=-7$ $\quad 1=28\cdot C,$ skąd $C=1/28.$

Wobec tego[2]

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\cdot(x+3)\cdot(x+7)}=\int_1^\infty \frac{1/21}{x}-\frac{1/12}{x+3}+\frac{1/28}{x+7}\,dx=$$

$$=\frac{1}{84}\cdot(4\cdot\ln|x|-7\cdot\ln|x+3|+3\cdot\ln|x+7|)\Big|_{x=1}^{\infty}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{84}\cdot(4\cdot\ln|x|-7\cdot\ln|x+3|+3\cdot\ln|x+7|)\right)\right)-\frac{1}{84}\cdot(4\cdot\ln1-7\cdot\ln4+3\cdot\ln8)=$$

$$=\frac{1}{84}\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^4\cdot(x+7)^3}{(x+3)^7}\right)-\frac{1}{84}\cdot(-14\cdot\ln2+9\cdot\ln2)=$$

$$=\frac{1}{84}\cdot\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{7}{x}\right)^3}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^7}\right)+\frac{5}{84}\cdot\ln2=\frac{1}{84}\cdot\ln1+\frac{5}{84}\cdot\ln2=\frac{5}{84}\cdot\ln2\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\dfrac{5}{84}\cdot\ln2$.

Uwaga: Całki $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x+3}\,dx$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x+7}\,dx$ są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x\to\infty}\ln x,\qquad \lim_{x\to\infty}\ln(x+3),\qquad \lim_{x\to\infty}\ln(x+7)$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty-\infty$.

[1] Można też wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B i C, porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

[2] Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.

Zadanie **11. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x \cdot \sin 3x \, dx \, .$$

Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \pi$, gdzie w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Użyjemy liczb zespolonych do wyprowadzenia odpowiedniej tożsamości trygonometrycznej.

Przyjmijmy $z = \cos x + i \sin x$, co daje

$$z^n = \cos nx + i \sin nx, \qquad z^{-n} = \cos nx - i \sin nx, \qquad \cos nx = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \qquad \sin nx = \frac{z^n - z^{-n}}{2i} \, .$$

Przy tych oznaczeniach otrzymujemy:

$$\sin^3 x \cdot \sin 3x = \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^3 \cdot \frac{z^3 - z^{-3}}{2i} = \frac{(z^3 - 3z + 3z^{-1} - z^{-3}) \cdot (z^3 - z^{-3})}{16} =$$

$$= \frac{z^6 - 3z^4 + 3z^2 - 2 + 3z^{-2} - 3z^{-4} + z^{-6}}{16} = \frac{\cos 6x}{8} - \frac{3\cos 4x}{8} + \frac{3\cos 2x}{8} - \frac{1}{8} \, .$$

Teraz możemy obliczyć daną w zadaniu całkę (zauważenie, że całka z cosinusa po pełnym okresie jest zerem, pozwala wydatnie uprościć obliczenia):

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x \cdot \sin 3x \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 6x}{8} - \frac{3\cos 4x}{8} + \frac{3\cos 2x}{8} - \frac{1}{8} \, dx = -\frac{\pi}{4} \, .$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $-\pi/4$.

Zadanie **12.** **(10 punktów)**
Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(10n+7)^n \cdot x^n}{(7n+5)^n}\,.$$

3 punkty za wyznaczenie promienia zbieżności

Rozwiązanie:
Zastosujmy kryterium Cauchy'ego do zbadania zbieżności danego w zadaniu szeregu traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem x. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(10n+7)^n \cdot x^n}{(7n+5)^n}\right|} = \frac{(10n+7)\cdot|x|}{7n+5} \to \frac{10\cdot|x|}{7}\,.$$

Jeżeli $\frac{10\cdot|x|}{7}<1$, czyli $|x|<\frac{7}{10}$, to dany w zadaniu szereg jest zbieżny.
Jeżeli zaś $\frac{10\cdot|x|}{7}>1$, czyli $|x|>\frac{7}{10}$, to dany w zadaniu szereg jest rozbieżny.
Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego jest równy $\frac{7}{10}$.

Pozostaje rozstrzygnąć zbieżność szeregu na końcach przedziału zbieżności, czyli dla $x=\pm 7/10$. W tym przypadku rozważymy ciąg wartości bezwzględnych wyrazów szeregu:

$$\left|\frac{(10n+7)^n \cdot x^n}{(7n+5)^n}\right| = \frac{(10n+7)^n \cdot 7^n}{(7n+5)^n \cdot 10^n} = \frac{(70n+49)^n}{(70n+50)^n} = \left(1-\frac{1}{70n+50}\right)^n =$$

$$= \left(\left(1-\frac{1}{70n+50}\right)^{70n+50}\right)^{\frac{n}{70n+50}} \to \left(e^{-1}\right)^{1/70} = \frac{1}{\sqrt[70]{e}} \neq 0\,.$$

Ponieważ wartości bezwzględne wyrazów szeregu dążą do liczby różnej od zera, szereg jest rozbieżny.

Odpowiedź:
Przedziałem zbieżności danego szeregu potęgowego jest przedział $(-7/10,\, 7/10)$.