Kolokwium 5 Wersja testu **A** 24 kwietnia 2024 r.

ANALIZA 2 24 kwietnia 2024 r., godz. 14:15-15:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Punktacja za zadanie **8** będzie liczona **podwójnie.**

Zadania **10 i 11** to zadania dodatkowe z punktacją liczoną **podwójnie.**

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 5 Wersja testu **A** 24 kwietnia 2024 r.

1. Dla danych m, n podaj pole figury

$$\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1\ \wedge\ x^n\leqslant y\leqslant x^m\}\,.$$

a) $m=4$, $n=9$, pole$=$ ...... b) $m=4$, $n=14$, pole$=$ ......

c) $m=5$, $n=11$, pole$=$ ...... d) $m=5$, $n=17$, pole$=$ ......

2. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[6]{x^{24}+x^{12}}}\,dx$, ... b) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[4]{x^{24}+x^{12}}}\,dx$, ...

c) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^{24}+x^{12}}}\,dx$, ... d) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^{24}+x^{12}}}\,dx$, ...

3. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^{12}+1}}$, ... b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^{12}+1}}$, ...

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[6]{n^{12}+1}}$, ... d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n^{12}+1}}$, ...

4. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[6]{x^{12}+1}}\,dx$, ... b) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^{12}+1}}\,dx$, ...

c) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^{12}+1}}\,dx$, ... d) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^{12}+1}}\,dx$, ...

Kolokwium 5 Wersja testu **A** 24 kwietnia 2024 r.

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\sqrt{\frac{k}{n^3}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{16n}\sqrt[4]{\frac{k}{n^5}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{8n}\sqrt[3]{\frac{k}{n^4}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{32n}\sqrt[5]{\frac{k}{n^6}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

6. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{25n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{16n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

7. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\sqrt{\frac{4}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{5n}\sqrt{\frac{25}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

8. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^{12}+n^p}-n^4\right)$, ……………………………………………

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^{6}+n^p}-n^2\right)$, ……………………………………………

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{12}+n^p}-n^6\right)$, ……………………………………………

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{6}+n^p}-n^3\right)$, ……………………………………………

9. Niech $C(n)=\int\limits_0^\infty \frac{x^n\,dx}{x^{88}+4x^{44}+1}$. Dla danego n podaj takie $k\neq n$, że $C(k)=C(n)$.

a) $n=35$, $k=$ .... b) $n=13$, $k=$ ....

c) $n=2$, $k=$ .... d) $n=24$, $k=$ ....

10. Wykres funkcji ciągłej $f_M:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ tworzą ramiona trójkątów równoramiennych w okolicy argumentów naturalnych, a poza tym funkcja f jest zerowa. Dokładniej:

$$f(0)=0,\quad f(n)=3^n,\quad f\left(n\pm\frac{1}{M^n}\right)=0 \qquad \text{dla } n\in\{1,2,3,\dots\},$$

a pomiędzy podanymi wyżej punktami funkcja f jest liniowa. Podaj wartość całki niewłaściwej:

a) $\int\limits_0^\infty f_{99}(x)\,dx=$ .... b) $\int\limits_0^\infty f_{60}(x)\,dx=$ ....

c) $\int\limits_0^\infty f_{15}(x)\,dx=$ .... d) $\int\limits_0^\infty f_{30}(x)\,dx=$ ....

11. Niech $\mathrm{K}(a,b)$ będzie kresem dolnym zbioru tych wartości rzeczywistych C, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:
Dla każdych dwóch ciągów (a_n), (b_n) o wyrazach dodatnich, spełniających warunki $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n^6=a$ oraz $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n^3=b$ zachodzi nierówność $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n^2 b_n^2\leqslant C$.
Wówczas:

a) $K(125,8)=$ .... b) $K(8,27)=$ ....

c) $K(27,8)=$ .... d) $K(8,125)=$ ....