Kolokwium 5 Wersja testu **A** 24 kwietnia 2024 r.

ANALIZA 2 24 kwietnia 2024 r., godz. 14:15-15:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Punktacja za zadanie **8** będzie liczona **podwójnie.**

Zadania **10 i 11** to zadania dodatkowe z punktacją liczoną **podwójnie.**

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 5 Wersja testu **A** 24 kwietnia 2024 r.

1. Dla danych m, n podaj pole figury

$$\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1\ \wedge\ x^n\leqslant y\leqslant x^m\}\ .$$

a) $m=4$, $n=9$, pole $=\mathbf{1/10}$ b) $m=4$, $n=14$, pole $=\mathbf{2/15}$

c) $m=5$, $n=11$, pole $=\mathbf{1/12}$ d) $m=5$, $n=17$, pole $=\mathbf{1/9}$

2. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[6]{x^{24}+x^{12}}}\,dx,\ \ \mathbf{(1,3)}$ b) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[4]{x^{24}+x^{12}}}\,dx,\ \ \mathbf{(2,5)}$

c) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^{24}+x^{12}}}\,dx,\ \ \mathbf{(3,7)}$ d) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^{24}+x^{12}}}\,dx,\ \ \mathbf{(5,11)}$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^{12}+1}},\ \ \mathbf{(-\infty,5/2)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^{12}+1}},\ \ \mathbf{(-\infty,9/2)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[6]{n^{12}+1}},\ \ \mathbf{(-\infty,1/2)}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n^{12}+1}},\ \ \mathbf{(-\infty,3/2)}$

4. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[6]{x^{12}+1}}\,dx,\ \ \mathbf{(-1,1/2)}$ b) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^{12}+1}}\,dx,\ \ \mathbf{(-1,9/2)}$

c) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^{12}+1}}\,dx,\ \ \mathbf{(-1,5/2)}$ d) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^{12}+1}}\,dx,\ \ \mathbf{(-1,3/2)}$

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\sqrt{\frac{k}{n^3}}=\mathbf{16/3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{16n}\sqrt[4]{\frac{k}{n^5}}=\mathbf{128/5}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{8n}\sqrt[3]{\frac{k}{n^4}}=\mathbf{12}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{32n}\sqrt[5]{\frac{k}{n^6}}=\mathbf{160/3}$

6. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{25n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{10-2\cdot\ln6}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{16n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{8-2\cdot\ln5}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{2-2\cdot\ln2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{4-2\cdot\ln3}$

7. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\boldsymbol{\pi/4}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\sqrt{\frac{4}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\boldsymbol{\pi}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{5n}\sqrt{\frac{25}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\boldsymbol{25\pi/4}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\boldsymbol{4\pi}$

8. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^{12}+n^p}-n^4\right)$, $\boldsymbol{(-\infty,7)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^{6}+n^p}-n^2\right)$, $\boldsymbol{(-\infty,3)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{12}+n^p}-n^6\right)$, $\boldsymbol{(-\infty,5)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{6}+n^p}-n^3\right)$, $\boldsymbol{(-\infty,2)}$

9. Niech $C(n)=\int\limits_0^\infty \frac{x^n\,dx}{x^{88}+4x^{44}+1}$. Dla danego n podaj takie $k\neq n$, że $C(k)=C(n)$.

a) $n=35,\ \ k=\mathbf{51}$ b) $n=13,\ \ k=\mathbf{73}$

c) $n=2,\ \ k=\mathbf{84}$ d) $n=24,\ \ k=\mathbf{62}$

10. Wykres funkcji ciągłej $f_M:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ tworzą ramiona trójkątów równoramiennych w okolicy argumentów naturalnych, a poza tym funkcja f jest zerowa. Dokładniej:

$$f(0)=0,\quad f(n)=3^n,\quad f\left(n\pm\frac{1}{M^n}\right)=0 \qquad \text{dla } n\in\{1,2,3,\ldots\},$$

a pomiędzy podanymi wyżej punktami funkcja f jest liniowa. Podaj wartość całki niewłaściwej:

a) $\int\limits_0^\infty f_{99}(x)\,dx=\mathbf{1/32}$ b) $\int\limits_0^\infty f_{60}(x)\,dx=\mathbf{1/19}$

c) $\int\limits_0^\infty f_{15}(x)\,dx=\mathbf{1/4}$ d) $\int\limits_0^\infty f_{30}(x)\,dx=\mathbf{1/9}$

11. Niech $\mathrm{K}(a,b)$ będzie kresem dolnym zbioru tych wartości rzeczywistych C, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:
Dla każdych dwóch ciągów (a_n), (b_n) o wyrazach dodatnich, spełniających warunki $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n^6=a$ oraz $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n^3=b$ zachodzi nierówność $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n^2b_n^2\leqslant C$.
Wówczas:

a) $K(125,8)=\mathbf{20}$ b) $K(8,27)=\mathbf{18}$

c) $K(27,8)=\mathbf{12}$ d) $K(8,125)=\mathbf{50}$

Kolokwium 5 Wersja testu **B** 24 kwietnia 2024 r.

ANALIZA 2 24 kwietnia 2024 r., godz. 14:15-15:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Punktacja za zadanie **8** będzie liczona **podwójnie.**

Zadania **10 i 11** to zadania dodatkowe z punktacją liczoną **podwójnie.**

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 5 Wersja testu **B** 24 kwietnia 2024 r.

1. Dla danych m, n podaj pole figury

$$\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1\ \wedge\ x^n\leqslant y\leqslant x^m\}\,.$$

a) $m=5,\ \ n=11,\ \ \text{pole}=\mathbf{1/12}$ b) $m=4,\ \ n=14,\ \ \text{pole}=\mathbf{2/15}$

c) $m=4,\ \ n=9,\ \ \text{pole}=\mathbf{1/10}$ d) $m=5,\ \ n=17,\ \ \text{pole}=\mathbf{1/9}$

2. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^{24}+x^{12}}}\,dx,\ \ (\mathbf{5,\,11})$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^{24}+x^{12}}}\,dx,\ \ (\mathbf{3,\,7})$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[6]{x^{24}+x^{12}}}\,dx,\ \ (\mathbf{1,\,3})$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[4]{x^{24}+x^{12}}}\,dx,\ \ (\mathbf{2,\,5})$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[6]{n^{12}+1}},\ \ (\mathbf{-\infty,\,1/2})$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^{12}+1}},\ \ (\mathbf{-\infty,\,5/2})$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^{12}+1}},\ \ (\mathbf{-\infty,\,9/2})$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n^{12}+1}},\ \ (\mathbf{-\infty,\,3/2})$

4. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[6]{x^{12}+1}}\,dx,\ \ (\mathbf{-1,\,1/2})$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^{12}+1}}\,dx,\ \ (\mathbf{-1,\,3/2})$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^{12}+1}}\,dx,\ \ (\mathbf{-1,\,5/2})$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^{12}+1}}\,dx,\ \ (\mathbf{-1,\,9/2})$

Kolokwium 5 Wersja testu **B** 24 kwietnia 2024 r.

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{32n}\sqrt[5]{\frac{k}{n^6}}=\mathbf{160/3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{16n}\sqrt[4]{\frac{k}{n^5}}=\mathbf{128/5}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{8n}\sqrt[3]{\frac{k}{n^4}}=\mathbf{12}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\sqrt{\frac{k}{n^3}}=\mathbf{16/3}$

6. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{16n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{8-2\cdot\ln 5}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{4-2\cdot\ln 3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{25n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{10-2\cdot\ln 6}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{2-2\cdot\ln 2}$

7. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\boldsymbol{\pi/4}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\sqrt{\frac{4}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\boldsymbol{\pi}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\boldsymbol{4\pi}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{5n}\sqrt{\frac{25}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\boldsymbol{25\pi/4}$

8. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^6+n^p}-n^3\right)$, $(\boldsymbol{-\infty,2})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^6+n^p}-n^2\right)$, $(\boldsymbol{-\infty,3})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{12}+n^p}-n^6\right)$, $(\boldsymbol{-\infty,5})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^{12}+n^p}-n^4\right)$, $(\boldsymbol{-\infty,7})$

9. Niech $C(n)=\int\limits_0^\infty \frac{x^n\,dx}{x^{88}+4x^{44}+1}$. Dla danego n podaj takie $k\neq n$, że $C(k)=C(n)$.

a) $n=13$, $k=\mathbf{73}$ b) $n=24$, $k=\mathbf{62}$

c) $n=2$, $k=\mathbf{84}$ d) $n=35$, $k=\mathbf{51}$

10. Wykres funkcji ciągłej $f_M:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ tworzą ramiona trójkątów równoramiennych w okolicy argumentów naturalnych, a poza tym funkcja f jest zerowa. Dokładniej:

$$f(0)=0,\quad f(n)=3^n,\quad f\left(n\pm\frac{1}{M^n}\right)=0 \qquad \text{dla } n\in\{1,2,3,\ldots\}\,,$$

a pomiędzy podanymi wyżej punktami funkcja f jest liniowa. Podaj wartość całki niewłaściwej:

a) $\int\limits_0^\infty f_{30}(x)\,dx=\mathbf{1/9}$ b) $\int\limits_0^\infty f_{99}(x)\,dx=\mathbf{1/32}$

c) $\int\limits_0^\infty f_{60}(x)\,dx=\mathbf{1/19}$ d) $\int\limits_0^\infty f_{15}(x)\,dx=\mathbf{1/4}$

11. Niech $\mathrm{K}(a,b)$ będzie kresem dolnym zbioru tych wartości rzeczywistych C, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:
Dla każdych dwóch ciągów (a_n), (b_n) o wyrazach dodatnich, spełniających warunki $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^6=a$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^3=b$ zachodzi nierówność $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2\leqslant C$.
Wówczas:

a) $K(8,125)=\mathbf{50}$ b) $K(125,8)=\mathbf{20}$

c) $K(27,8)=\mathbf{12}$ d) $K(8,27)=\mathbf{18}$

Kolokwium 5 Wersja testu **C** 24 kwietnia 2024 r.

ANALIZA 2 24 kwietnia 2024 r., godz. 14:15-15:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Punktacja za zadanie **8** będzie liczona **podwójnie.**

Zadania **10 i 11** to zadania dodatkowe z punktacją liczoną **podwójnie.**

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 5 Wersja testu **C** 24 kwietnia 2024 r.

1. Dla danych m, n podaj pole figury

$$\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1\ \wedge\ x^n\leqslant y\leqslant x^m\}\ .$$

a) $m=5,\ \ n=11,\ \ \text{pole}=\mathbf{1/12}$ b) $m=4,\ \ n=9,\ \ \text{pole}=\mathbf{1/10}$

c) $m=5,\ \ n=17,\ \ \text{pole}=\mathbf{1/9}$ d) $m=4,\ \ n=14,\ \ \text{pole}=\mathbf{2/15}$

2. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[6]{x^{24}+x^{12}}}\,dx,\ \ (\mathbf{1},\mathbf{3})$ b) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^{24}+x^{12}}}\,dx,\ \ (\mathbf{3},\mathbf{7})$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^{24}+x^{12}}}\,dx,\ \ (\mathbf{5},\mathbf{11})$ d) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[4]{x^{24}+x^{12}}}\,dx,\ \ (\mathbf{2},\mathbf{5})$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^{12}+1}},\ \ (-\boldsymbol{\infty},\mathbf{9/2})$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^{12}+1}},\ \ (-\boldsymbol{\infty},\mathbf{5/2})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[6]{n^{12}+1}},\ \ (-\boldsymbol{\infty},\mathbf{1/2})$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n^{12}+1}},\ \ (-\boldsymbol{\infty},\mathbf{3/2})$

4. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[6]{x^{12}+1}}\,dx,\ \ (-\mathbf{1},\mathbf{1/2})$ b) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^{12}+1}}\,dx,\ \ (-\mathbf{1},\mathbf{5/2})$

c) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^{12}+1}}\,dx,\ \ (-\mathbf{1},\mathbf{3/2})$ d) $\int\limits_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^{12}+1}}\,dx,\ \ (-\mathbf{1},\mathbf{9/2})$

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{8n}\sqrt[3]{\frac{k}{n^4}}=\mathbf{12}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\sqrt{\frac{k}{n^3}}=\mathbf{16/3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{32n}\sqrt[5]{\frac{k}{n^6}}=\mathbf{160/3}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{16n}\sqrt[4]{\frac{k}{n^5}}=\mathbf{128/5}$

6. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{16n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{8-2\cdot\ln 5}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{4-2\cdot\ln 3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{25n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{10-2\cdot\ln 6}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{2-2\cdot\ln 2}$

7. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\sqrt{\frac{4}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\boldsymbol{\pi}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\boldsymbol{\pi}\mathbf{/4}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{5n}\sqrt{\frac{25}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\mathbf{25}\boldsymbol{\pi}\mathbf{/4}$

8. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^{12}+n^p}-n^4\right)$, $(\boldsymbol{-\infty},\mathbf{7})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^{6}+n^p}-n^2\right)$, $(\boldsymbol{-\infty},\mathbf{3})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{12}+n^p}-n^6\right)$, $(\boldsymbol{-\infty},\mathbf{5})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{6}+n^p}-n^3\right)$, $(\boldsymbol{-\infty},\mathbf{2})$

9. Niech $C(n)=\int\limits_0^\infty \frac{x^n\,dx}{x^{88}+4x^{44}+1}$. Dla danego n podaj takie $k\neq n$, że $C(k)=C(n)$.

a) $n=13$, $k=$ **73**

b) $n=35$, $k=$ **51**

c) $n=2$, $k=$ **84**

d) $n=24$, $k=$ **62**

10. Wykres funkcji ciągłej $f_M:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ tworzą ramiona trójkątów równoramiennych w okolicy argumentów naturalnych, a poza tym funkcja f jest zerowa. Dokładniej:

$$f(0)=0,\quad f(n)=3^n,\quad f\left(n\pm\frac{1}{M^n}\right)=0 \qquad \text{dla } n\in\{1,2,3,\ldots\}\,,$$

a pomiędzy podanymi wyżej punktami funkcja f jest liniowa. Podaj wartość całki niewłaściwej:

a) $\int\limits_0^\infty f_{15}(x)\,dx=$ **1/4**

b) $\int\limits_0^\infty f_{99}(x)\,dx=$ **1/32**

c) $\int\limits_0^\infty f_{60}(x)\,dx=$ **1/19**

d) $\int\limits_0^\infty f_{30}(x)\,dx=$ **1/9**

11. Niech K(a,b) będzie kresem dolnym zbioru tych wartości rzeczywistych C, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:
Dla każdych dwóch ciągów (a_n), (b_n) o wyrazach dodatnich, spełniających warunki $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^6=a$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^3=b$ zachodzi nierówność $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2\leqslant C$.
Wówczas:

a) $K(125,8)=$ **20**

b) $K(27,8)=$ **12**

c) $K(8,27)=$ **18**

d) $K(8,125)=$ **50**

Kolokwium 5 Wersja testu **D** 24 kwietnia 2024 r.

ANALIZA 2 24 kwietnia 2024 r., godz. 14:15-15:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Punktacja za zadanie **8** będzie liczona **podwójnie.**

Zadania **10 i 11** to zadania dodatkowe z punktacją liczoną **podwójnie.**

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 5 Wersja testu **D** 24 kwietnia 2024 r.

1. Dla danych m, n podaj pole figury

$$\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1\ \wedge\ x^n\leqslant y\leqslant x^m\}\ .$$

a) $m=4$, $n=9$, pole $=\mathbf{1/10}$ b) $m=5$, $n=17$, pole $=\mathbf{1/9}$

c) $m=4$, $n=14$, pole $=\mathbf{2/15}$ d) $m=5$, $n=11$, pole $=\mathbf{1/12}$

2. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[6]{x^{24}+x^{12}}}\,dx$, $(\mathbf{1,3})$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^{24}+x^{12}}}\,dx$, $(\mathbf{5,11})$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[4]{x^{24}+x^{12}}}\,dx$, $(\mathbf{2,5})$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^{24}+x^{12}}}\,dx$, $(\mathbf{3,7})$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[6]{n^{12}+1}}$, $(-\boldsymbol{\infty},\mathbf{1/2})$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^{12}+1}}$, $(-\boldsymbol{\infty},\mathbf{5/2})$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n^{12}+1}}$, $(-\boldsymbol{\infty},\mathbf{3/2})$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^{12}+1}}$, $(-\boldsymbol{\infty},\mathbf{9/2})$

4. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[6]{x^{12}+1}}\,dx$, $(\mathbf{-1,1/2})$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^{12}+1}}\,dx$, $(\mathbf{-1,3/2})$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^{12}+1}}\,dx$, $(\mathbf{-1,9/2})$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^{12}+1}}\,dx$, $(\mathbf{-1,5/2})$

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{8n}\sqrt[3]{\frac{k}{n^4}} = \mathbf{12}$ b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{4n}\sqrt{\frac{k}{n^3}} = \mathbf{16/3}$

c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{16n}\sqrt[4]{\frac{k}{n^5}} = \mathbf{128/5}$ d) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{32n}\sqrt[5]{\frac{k}{n^6}} = \mathbf{160/3}$

6. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{16n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}} = \mathbf{8-2\cdot ln5}$ b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{4n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}} = \mathbf{4-2\cdot ln3}$

c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{25n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}} = \mathbf{10-2\cdot ln6}$ d) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}} = \mathbf{2-2\cdot ln2}$

7. Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{5n}\sqrt{\frac{25}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}} = \mathbf{25\pi/4}$ b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\sqrt{\frac{4}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}} = \boldsymbol{\pi}$

c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{4n}\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}} = \mathbf{4\pi}$ d) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}} = \mathbf{\pi/4}$

8. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^{12}+n^p}-n^4\right)$, $(\mathbf{-\infty,7})$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^{6}+n^p}-n^2\right)$, $(\mathbf{-\infty,3})$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{12}+n^p}-n^6\right)$, $(\mathbf{-\infty,5})$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{6}+n^p}-n^3\right)$, $(\mathbf{-\infty,2})$

9. Niech $C(n) = \int\limits_0^\infty \frac{x^n\,dx}{x^{88}+4x^{44}+1}$. Dla danego n podaj takie $k \neq n$, że $C(k) = C(n)$.

a) $n=35$, $k=\mathbf{51}$ b) $n=2$, $k=\mathbf{84}$

c) $n=13$, $k=\mathbf{73}$ d) $n=24$, $k=\mathbf{62}$

10. Wykres funkcji ciągłej $f_M : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tworzą ramiona trójkątów równoramiennych w okolicy argumentów naturalnych, a poza tym funkcja f jest zerowa. Dokładniej:

$$f(0)=0, \quad f(n)=3^n, \quad f\left(n \pm \frac{1}{M^n}\right)=0 \qquad \text{dla } n \in \{1,2,3,\ldots\}\,,$$

a pomiędzy podanymi wyżej punktami funkcja f jest liniowa. Podaj wartość całki niewłaściwej:

a) $\int\limits_0^\infty f_{30}(x)\,dx = \mathbf{1/9}$ b) $\int\limits_0^\infty f_{15}(x)\,dx = \mathbf{1/4}$

c) $\int\limits_0^\infty f_{99}(x)\,dx = \mathbf{1/32}$ d) $\int\limits_0^\infty f_{60}(x)\,dx = \mathbf{1/19}$

11. Niech $\mathrm{K}(a,b)$ będzie kresem dolnym zbioru tych wartości rzeczywistych C, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:
Dla każdych dwóch ciągów (a_n), (b_n) o wyrazach dodatnich, spełniających warunki $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n^6 = a$ oraz $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n^3 = b$ zachodzi nierówność $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n^2 b_n^2 \leqslant C$.
Wówczas:

a) $K(125,8)=\mathbf{20}$ b) $K(8,125)=\mathbf{50}$

c) $K(8,27)=\mathbf{18}$ d) $K(27,8)=\mathbf{12}$

Kolokwium 5 Wersja testu **E** 24 kwietnia 2024 r.

ANALIZA 2 24 kwietnia 2024 r., godz. 14:15-15:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Punktacja za zadanie **8** będzie liczona **podwójnie.**

Zadania **10 i 11** to zadania dodatkowe z punktacją liczoną **podwójnie.**

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry

NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 5 Wersja testu **E** 24 kwietnia 2024 r.

1. Dla danych m, n podaj pole figury

$$\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1\ \wedge\ x^n\leqslant y\leqslant x^m\}\ .$$

a) $m=4$, $n=14$, pole $=\mathbf{2/15}$ b) $m=4$, $n=9$, pole $=\mathbf{1/10}$

c) $m=5$, $n=11$, pole $=\mathbf{1/12}$ d) $m=5$, $n=17$, pole $=\mathbf{1/9}$

2. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^{24}+x^{12}}}\,dx$, $(\mathbf{3,\,7})$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[4]{x^{24}+x^{12}}}\,dx$, $(\mathbf{2,\,5})$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^{24}+x^{12}}}\,dx$, $(\mathbf{5,\,11})$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[6]{x^{24}+x^{12}}}\,dx$, $(\mathbf{1,\,3})$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n^{12}+1}}$, $(\mathbf{-\infty,\,3/2})$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^{12}+1}}$, $(\mathbf{-\infty,\,5/2})$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[6]{n^{12}+1}}$, $(\mathbf{-\infty,\,1/2})$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^{12}+1}}$, $(\mathbf{-\infty,\,9/2})$

4. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^{12}+1}}\,dx$, $(\mathbf{-1,\,5/2})$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^{12}+1}}\,dx$, $(\mathbf{-1,\,3/2})$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[6]{x^{12}+1}}\,dx$, $(\mathbf{-1,\,1/2})$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^{12}+1}}\,dx$, $(\mathbf{-1,\,9/2})$

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{16n}\sqrt[4]{\frac{k}{n^5}}=\mathbf{128/5}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{32n}\sqrt[5]{\frac{k}{n^6}}=\mathbf{160/3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\sqrt{\frac{k}{n^3}}=\mathbf{16/3}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{8n}\sqrt[3]{\frac{k}{n^4}}=\mathbf{12}$

6. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{4-2\cdot\ln 3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{16n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{8-2\cdot\ln 5}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{25n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{10-2\cdot\ln 6}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{2-2\cdot\ln 2}$

7. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\boldsymbol{\pi/4}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{5n}\sqrt{\frac{25}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\boldsymbol{25\pi/4}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\boldsymbol{4\pi}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\sqrt{\frac{4}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\boldsymbol{\pi}$

8. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{12}+n^p}-n^6\right)$, $\boldsymbol{(-\infty,5)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{6}+n^p}-n^3\right)$, $\boldsymbol{(-\infty,2)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^{6}+n^p}-n^2\right)$, $\boldsymbol{(-\infty,3)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^{12}+n^p}-n^4\right)$, $\boldsymbol{(-\infty,7)}$

9. Niech $C(n)=\int\limits_0^{\infty}\frac{x^n\,dx}{x^{88}+4x^{44}+1}$. Dla danego n podaj takie $k\neq n$, że $C(k)=C(n)$.

a) $n=2,\quad k=\mathbf{84}$

b) $n=24,\quad k=\mathbf{62}$

c) $n=13,\quad k=\mathbf{73}$

d) $n=35,\quad k=\mathbf{51}$

10. Wykres funkcji ciągłej $f_M:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ tworzą ramiona trójkątów równoramiennych w okolicy argumentów naturalnych, a poza tym funkcja f jest zerowa. Dokładniej:

$$f(0)=0,\quad f(n)=3^n,\quad f\left(n\pm\frac{1}{M^n}\right)=0 \qquad \text{dla } n\in\{1,2,3,\ldots\}\,,$$

a pomiędzy podanymi wyżej punktami funkcja f jest liniowa. Podaj wartość całki niewłaściwej:

a) $\int\limits_0^{\infty} f_{30}(x)\,dx=\mathbf{1/9}$

b) $\int\limits_0^{\infty} f_{15}(x)\,dx=\mathbf{1/4}$

c) $\int\limits_0^{\infty} f_{99}(x)\,dx=\mathbf{1/32}$

d) $\int\limits_0^{\infty} f_{60}(x)\,dx=\mathbf{1/19}$

11. Niech $\mathrm{K}(a,b)$ będzie kresem dolnym zbioru tych wartości rzeczywistych C, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:
Dla każdych dwóch ciągów (a_n), (b_n) o wyrazach dodatnich, spełniających warunki $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^6=a$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^3=b$ zachodzi nierówność $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2\leqslant C$.
Wówczas:

a) $K(8,125)=\mathbf{50}$

b) $K(125,8)=\mathbf{20}$

c) $K(8,27)=\mathbf{18}$

d) $K(27,8)=\mathbf{12}$

Kolokwium 5 Wersja testu **F** 24 kwietnia 2024 r.

ANALIZA 2 24 kwietnia 2024 r., godz. 14:15-15:45

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Punktacja za zadanie **8** będzie liczona **podwójnie.**

Zadania **10 i 11** to zadania dodatkowe z punktacją liczoną **podwójnie.**

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Kolokwium 5 Wersja testu **F** 24 kwietnia 2024 r.

1. Dla danych m, n podaj pole figury

$$\{(x,y):\ 0\leqslant x\leqslant 1\ \wedge\ x^n\leqslant y\leqslant x^m\}\ .$$

a) $m=5,\ \ n=17,\ \ \text{pole}=\mathbf{1/9}$ b) $m=5,\ \ n=11,\ \ \text{pole}=\mathbf{1/12}$

c) $m=4,\ \ n=9,\ \ \text{pole}=\mathbf{1/10}$ d) $m=4,\ \ n=14,\ \ \text{pole}=\mathbf{2/15}$

2. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[4]{x^{24}+x^{12}}}\,dx,\ \ (\mathbf{2,5})$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^{24}+x^{12}}}\,dx,\ \ (\mathbf{5,11})$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[6]{x^{24}+x^{12}}}\,dx,\ \ (\mathbf{1,3})$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p}{\sqrt[3]{x^{24}+x^{12}}}\,dx,\ \ (\mathbf{3,7})$

3. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[6]{n^{12}+1}},\ \ (-\boldsymbol{\infty},\mathbf{1/2})$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^{12}+1}},\ \ (-\boldsymbol{\infty},\mathbf{9/2})$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n^{12}+1}},\ \ (-\boldsymbol{\infty},\mathbf{3/2})$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^p\cdot\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^{12}+1}},\ \ (-\boldsymbol{\infty},\mathbf{5/2})$

4. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^{12}+1}}\,dx,\ \ (\mathbf{-1,3/2})$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^{12}+1}}\,dx,\ \ (\mathbf{-1,9/2})$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[6]{x^{12}+1}}\,dx,\ \ (\mathbf{-1,1/2})$ d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^p\cdot\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^{12}+1}}\,dx,\ \ (\mathbf{-1,5/2})$

5. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{8n}\sqrt[3]{\frac{k}{n^4}}=\mathbf{12}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{16n}\sqrt[4]{\frac{k}{n^5}}=\mathbf{128/5}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\sqrt{\frac{k}{n^3}}=\mathbf{16/3}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{32n}\sqrt[5]{\frac{k}{n^6}}=\mathbf{160/3}$

6. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{2-2\cdot\ln 2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{25n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{10-2\cdot\ln 6}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{16n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{8-2\cdot\ln 5}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\frac{1}{n+\sqrt{kn}}=\mathbf{4-2\cdot\ln 3}$

7. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{4n}\sqrt{\frac{16}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\mathbf{4\pi}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\sqrt{\frac{4}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\boldsymbol{\pi}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{5n}\sqrt{\frac{25}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\mathbf{25\pi/4}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{k^2}{n^4}}=\boldsymbol{\pi/4}$

8. Podaj zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{12}+n^p}-n^6\right)$, $(\mathbf{-\infty,5})$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^{12}+n^p}-n^4\right)$, $(\mathbf{-\infty,7})$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{6}+n^p}-n^3\right)$, $(\mathbf{-\infty,2})$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^{6}+n^p}-n^2\right)$, $(\mathbf{-\infty,3})$

9. Niech $C(n)=\int\limits_0^\infty \frac{x^n\,dx}{x^{88}+4x^{44}+1}$. Dla danego n podaj takie $k\neq n$, że $C(k)=C(n)$.

a) $n=13$, $k=\mathbf{73}$

b) $n=35$, $k=\mathbf{51}$

c) $n=24$, $k=\mathbf{62}$

d) $n=2$, $k=\mathbf{84}$

10. Wykres funkcji ciągłej $f_M:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ tworzą ramiona trójkątów równoramiennych w okolicy argumentów naturalnych, a poza tym funkcja f jest zerowa. Dokładniej:

$$f(0)=0, \quad f(n)=3^n, \quad f\left(n\pm\frac{1}{M^n}\right)=0 \qquad \text{dla } n\in\{1,2,3,\ldots\},$$

a pomiędzy podanymi wyżej punktami funkcja f jest liniowa. Podaj wartość całki niewłaściwej:

a) $\int\limits_0^\infty f_{15}(x)\,dx=\mathbf{1/4}$

b) $\int\limits_0^\infty f_{99}(x)\,dx=\mathbf{1/32}$

c) $\int\limits_0^\infty f_{30}(x)\,dx=\mathbf{1/9}$

d) $\int\limits_0^\infty f_{60}(x)\,dx=\mathbf{1/19}$

11. Niech $\mathrm{K}(a,b)$ będzie kresem dolnym zbioru tych wartości rzeczywistych C, dla których prawdziwe jest następujące twierdzenie:
Dla każdych dwóch ciągów (a_n), (b_n) o wyrazach dodatnich, spełniających warunki $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^6=a$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^3=b$ zachodzi nierówność $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2\leqslant C$.
Wówczas:

a) $K(8,125)=\mathbf{50}$

b) $K(8,27)=\mathbf{18}$

c) $K(125,8)=\mathbf{20}$

d) $K(27,8)=\mathbf{12}$