ANALIZA 2, KOLOKWIUM nr 4, 10.04.2024, godz. 14:15–15:45

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **5. (10 punktów)**

Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_{20}^{21} \sqrt{15x^3 - 30\,000}\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 315.

Zadanie **6. (10 punktów)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{5}+\ldots+\sqrt[4]{n-3}+\sqrt[4]{n-2}+\sqrt[4]{n-1}+\sqrt[4]{n}\right)^p}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-3}+\sqrt{n-2}+\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

dla tak dobranej liczby rzeczywistej p, aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

Zadanie **7. (10 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^{49}+x^{25}}\,.$$

Wskazówka: Spróbować podstawienia $t = x^k$ dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej k.

Zadanie **8. (10 punktów)**

Obliczyć objętość bryły

$$\left\{(x,y,z):\ \left(x^2+y^2\right)^3 \leqslant z \leqslant 1\right\}$$

i wyznaczyć położenie jej środka ciężkości.

Przydatne wzorki znajdziesz na odwrocie.

Wzorki

$$\left(\frac{\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx}{\int_a^b g(x)-f(x)\,dx},\ \frac{\frac{1}{2}\cdot\int_a^b (g(x))^2-(f(x))^2\,dx}{\int_a^b g(x)-f(x)\,dx}\right) \tag{561}$$

$$\left(\frac{\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx},\ \frac{\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}\right) \tag{1105}$$

$$V_{OX}=\pi\cdot\int_a^b g^2(x)-f^2(x)\,dx \qquad x_s=\frac{\int_a^b x\cdot(g^2(x)-f^2(x))\,dx}{\int_a^b g^2(x)-f^2(x)\,dx} \tag{1729}$$

$$V_{OY}=2\pi\cdot\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx \qquad y_s=\frac{\int_a^b x\cdot(g^2(x)-f^2(x))\,dx}{2\cdot\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx} \tag{2465}$$

$$P_{OX}=2\pi\cdot\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \qquad x_s=\frac{\int_a^b x\cdot f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx} \tag{2821}$$

$$P_{OY}=2\pi\cdot\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \qquad y_s=\frac{\int_a^b x\cdot f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx} \tag{6601}$$