KOLOKWIUM nr 4, 10.04.2024, godz. 14:15–15:45

Zadanie **5. (10 punktów)**

Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_{20}^{21} \sqrt{15x^3 - 30\,000}\, dx$$

jest mniejsza czy większa od 315.

Rozwiązanie:

Sposób I (normalny)

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x) = \sqrt{15x^3 - 30\,000}\,.$$

Wówczas

$$f'(x) = \frac{45x^2}{2\cdot\sqrt{15x^3 - 30\,000}}$$

oraz

$$f''(x) = \frac{90x}{2\cdot\sqrt{15x^3 - 30\,000}} - \frac{45x^2\cdot 45x^2}{2\cdot 2\cdot (15x^3 - 30\,000)^{3/2}} =$$

$$= \frac{180x\cdot(15x^3 - 30\,000)}{4\cdot (15x^3 - 30\,000)^{3/2}} - \frac{45x^2\cdot 45x^2}{4\cdot (15x^3 - 30\,000)^{3/2}} =$$

$$= \frac{180\cdot 15\cdot x^4 - 180\cdot 30\,000x - 45^2\cdot x^4}{4\cdot (15x^3 - 30\,000)^{3/2}} =$$

$$= \frac{12\cdot 15^2\cdot x^4 - 12\cdot 15\cdot 15\cdot 2000x - 9\cdot 15^2\cdot x^4}{4\cdot (15x^3 - 30\,000)^{3/2}} =$$

$$= \frac{4\cdot 3\cdot 15^2\cdot x^4 - 8000\cdot 3\cdot 15^2\cdot x - 3\cdot 3\cdot 15^2\cdot x^4}{4\cdot (15x^3 - 30\,000)^{3/2}} =$$

$$= \frac{3\cdot 15^2\cdot x\cdot (x^3 - 8000)}{4\cdot (15x^3 - 30\,000)^{3/2}} = \frac{3\cdot 15^2\cdot x\cdot (x^3 - 20^3)}{4\cdot (15x^3 - 30\,000)^{3/2}} > 0$$

dla $x > 20$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale całkowania.

Zatem wykres funkcji f w przedziale całkowania leży powyżej stycznej do wykresu w punkcie $x = 20$. Ponieważ $f(20) = 300$ oraz $f'(20) = 30$, dla $x \in (20, 21]$ zachodzi nierówność

$$f(x) > 300 + 30\cdot (x - 20)$$

i w konsekwencji

$$\int_{20}^{21} \sqrt{15x^3 - 30\,000}\, dx > \int_{20}^{21} 300 + 30\cdot (x - 20)\, dx = 315\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest większa od 315.

Uwaga: Obliczenia przybliżone przy użyciu komputera pokazują, że dana całka ma w przybliżeniu wartość 315,00579, różni się więc od 315 o mniej niż jedną setną.

Sposób II (dla miłośników rachunków – w tym wypadku bardziej przeraża perspektywa rachunków niż same rachunki)

Kluczową w rozwiązaniu nierówność

$$f(x) > 300 + 30 \cdot (x-20)\,,$$

czyli

$$\sqrt{15x^3 - 30\,000} > 30x - 300\,,$$

można udowodnić bezpośrednio przed przekształcanie do postaci równoważnych. Otrzymujemy kolejno:

$$15x^3 - 30\,000 > 900x^2 - 18\,000x + 90\,000\,,$$

$$x^3 - 2000 > 60x^2 - 1200x + 6000\,,$$

$$x^3 - 60x^2 + 1200x - 8000 > 0\,,$$

$$(x-20)^3 > 0\,,$$

co jest prawdą dla $x > 20$.

Zadanie **6. (10 punktów)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{5}+\ldots+\sqrt[4]{n-3}+\sqrt[4]{n-2}+\sqrt[4]{n-1}+\sqrt[4]{n}\right)^p}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\ldots+\sqrt{n-3}+\sqrt{n-2}+\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

dla tak dobranej liczby rzeczywistej p, aby granica ta była liczbą rzeczywistą dodatnią.

Rozwiązanie:

Oczekujemy, że suma występująca w mianowniku jest rzędu wielkości $n^{3/2}$, gdyż mamy tam n składników, a większość z nich jest rzędu $n^{1/2}$.

Zauważmy, że

$$n^{-3/2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right),$$

gdzie $f(x)=\sqrt{x}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału $[0,1]$ na n przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left.\frac{2x^{3/2}}{3}\right|_{x=0}^{1}=\frac{2}{3}.$$

Analogicznie oczekujemy, że suma występująca w liczniku jest rzędu wielkości $n^{5/4}$, gdyż mamy tam n składników, a większość z nich jest rzędu $n^{1/4}$.

Zauważmy, że

$$n^{-5/4}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt[4]{i}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt[4]{\frac{i}{n}}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}g\left(\frac{i}{n}\right),$$

gdzie $g(x)=\sqrt[4]{x}$.

Ponieważ funkcja g jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału $[0,1]$ na n przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}g\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\sqrt[4]{x}\,dx=\left.\frac{4x^{5/4}}{5}\right|_{x=0}^{1}=\frac{4}{5}.$$

Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[4]{i}\right)^p}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i}}=\lim_{n\to\infty}\left(n^{5p/4-3/2}\cdot\frac{\left(n^{-5/4}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt[4]{i}\right)^p}{n^{-3/2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i}}\right)=\frac{(4/5)^p}{2/3},$$

o ile $5p/4=3/2$, czyli $p=6/5$.

Dla tej wartości p szukana granica jest równa

$$\frac{(4/5)^{6/5}}{2/3}=\frac{6\cdot\sqrt[5]{4}}{5\cdot\sqrt[5]{5}}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu granica ciągu jest równa $\dfrac{6\cdot\sqrt[5]{4}}{5\cdot\sqrt[5]{5}}$ dla $p=6/5$.

Zadanie **7. (10 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^{49}+x^{25}}\,.$$

Wskazówka: Spróbować podstawienia $t=x^k$ dla odpowiednio dobranej liczby naturalnej k.

Rozwiązanie:

Sposób I

Przepisanie funkcji podcałkowej w postaci

$$\int \frac{dx}{x^{49}+x^{25}}=\int \frac{x^{23}\,dx}{x^{72}+x^{48}}$$

nasuwa pomysł podstawienia $t=x^{24}$ i formalnie $dt=24x^{23}\,dx$, co prowadzi do

$$\int \frac{x^{23}\,dx}{x^{72}+x^{48}}=\frac{1}{24}\cdot\int \frac{dt}{t^3+t^2}\,.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\frac{1}{t^3+t^2}=\frac{1}{t^2\cdot(t+1)}=\frac{A}{t^2}+\frac{B}{t}+\frac{D}{t+1}\,,$$

$$1=A\cdot(t+1)+B\cdot t\cdot(t+1)+D\cdot t^2\,,$$

$$1=A\cdot t+A+B\cdot t^2+B\cdot t+D\cdot t^2\,,$$

$$\begin{cases} 1 = A \\ 0 = A+B \\ 0 = B+D \end{cases}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań otrzymujemy $A=D=1$ oraz $B=-1$, co pozwala dokończyć całkowanie

$$\frac{1}{24}\cdot\int \frac{dt}{t^3+t^2}=\frac{1}{24}\cdot\int \frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}\,dt=\frac{1}{24}\cdot\left(-\frac{1}{t}-\ln|t|+\ln|t+1|\right)+C=$$

$$=\frac{1}{24}\cdot\left(-\frac{1}{x^{24}}-\ln\left(x^{24}\right)+\ln\left(x^{24}+1\right)\right)+C=-\frac{1}{24\cdot x^{24}}-\ln|x|+\frac{\ln\left(x^{24}+1\right)}{24}+C\,.$$

Sposób II

Wykonujemy podstawienie $x=1/t$, czyli $t=1/x$, i formalnie $dx=-1/t^2\,dt$.

Otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{x^{49}+x^{25}}=-\int \frac{dt}{\left(t^{-49}+t^{-25}\right)\cdot t^2}=-\int \frac{t^{47}\,dt}{1+t^{24}}\,.$$

Po wykonaniu podstawienia $s=t^{24}$ i formalnie $t^{23}\,dt=ds/24$ kontynuujemy całkowanie:

$$-\int \frac{t^{47}\,dt}{1+t^{24}}=-\frac{1}{24}\cdot\int \frac{s\,ds}{1+s}=-\frac{1}{24}\cdot\int 1-\frac{1}{1+s}\,ds=-\frac{1}{24}\cdot(s-\ln|1+s|)+C=$$

$$=-\frac{s}{24}+\frac{1}{24}\cdot\ln|1+s|+C=-\frac{t^{24}}{24}+\frac{1}{24}\cdot\ln\left(1+t^{24}\right)+C=-\frac{x^{-24}}{24}+\frac{1}{24}\cdot\ln\left(1+x^{-24}\right)+C=$$

$$= -\frac{1}{24\cdot x^{24}} + \frac{1}{24}\cdot \ln\left(\frac{1+x^{24}}{x^{24}}\right) + C\,.$$

Sposób III

Wykonujemy podstawienie $x=1/t$ jak w sposobie II, a następnie przekształcamy otrzymaną całkę:

$$-\int \frac{t^{47}\,dt}{1+t^{24}} = -\int \frac{t^{47}+t^{23}-t^{23}}{1+t^{24}}\,dt = -\int t^{23} - \frac{t^{23}}{1+t^{24}}\,dt = \int -t^{23} + \frac{t^{23}}{1+t^{24}}\,dt =$$

$$= -\frac{t^{24}}{24} + \frac{1}{24}\cdot \ln\left(1+t^{24}\right) + C$$

i dalej porządkujemy jak w sposobie II.

Zadanie **8. (10 punktów)**

Obliczyć objętość bryły

$$\left\{(x,\,y,\,z):\ \left(x^2+y^2\right)^3\leqslant z\leqslant 1\right\}$$

i wyznaczyć położenie jej środka ciężkości.

Przydatne wzorki znajdziesz na odwrocie.

Rozwiązanie:

Dana w zadaniu bryła powstaje przez obrót zbioru[1]

$$\left\{(x,\,z):\ x\in[0,1]\ \wedge\ x^6\leqslant z\leqslant 1\right\}$$

wokół osi OZ.

Zastosujemy więc wzory (2465), przy czym rolę współrzędnej y przejmnie współrzędna z:

$$V_{OZ}=2\pi\cdot\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx \qquad\qquad z_s=\frac{\int_a^b x\cdot\left(g^2(x)-f^2(x)\right)\,dx}{2\cdot\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx} \qquad (2465z)$$

We wzorach tych przyjmujemy $a=0$, $b=1$, $g(x)=1$, $f(x)=x^6$.

Całkowanie prowadzi do

$$C_1=\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx=\int_0^1 x\cdot\left(1-x^6\right)\,dx=\int_0^1 x-x^7\,dx=\left.\frac{x^2}{2}-\frac{x^8}{8}\right|_{x=0}^{1}=\frac{3}{8}$$

oraz

$$C_2=\int_a^b x\cdot\left(g^2(x)-f^2(x)\right)\,dx=\int_0^1 x\cdot\left(1-x^{12}\right)\,dx=\int_0^1 x-x^{13}\,dx=\left.\frac{x^2}{2}-\frac{x^{14}}{14}\right|_{x=0}^{1}=\frac{3}{7}\,.$$

Wobec tego objętość bryły jest równa

$$2\pi\cdot C_1=\frac{3\pi}{4}\,,$$

a współrzędna z-owa[2] jej środka ciężkości wynosi

$$\frac{C_2}{2\cdot C_1}=\frac{3/7}{3/4}=\frac{4}{7}\,.$$

Odpowiedź: Podana bryła ma objętość $3\pi/4$, a jej środek ciężkości leży w punkcie $(0,\,0,\,4/7)$.

Uwaga: Podana bryła powstaje przez obrót zbioru

$$\left\{(x,\,z):\ z\in[0,1]\ \wedge\ 0\leqslant x\leqslant \sqrt[6]{z}\right\}$$

wokół osi OZ (tym razem w roli osi argumentu), wobec czego zadanie można też rozwiązać wykorzystując odpowiednio zmodyfikowane wzory (1729).

[1] Zbiór ten znajduje się w płaszczyźnie XOZ.

[2] Środek ciężkości figury obrotowej leży na osi obrotu, więc w tym wypadku współrzędne x-owa i y-owa środka ciężkości są zerami.

Wzorki

$$\left(\frac{\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx}{\int_a^b g(x)-f(x)\,dx},\ \frac{\frac{1}{2}\cdot\int_a^b (g(x))^2-(f(x))^2\,dx}{\int_a^b g(x)-f(x)\,dx}\right) \tag{561}$$

$$\left(\frac{\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx},\ \frac{\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}\right) \tag{1105}$$

$$V_{OX}=\pi\cdot\int_a^b g^2(x)-f^2(x)\,dx \qquad x_s=\frac{\int_a^b x\cdot(g^2(x)-f^2(x))\,dx}{\int_a^b g^2(x)-f^2(x)\,dx} \tag{1729}$$

$$V_{OY}=2\pi\cdot\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx \qquad y_s=\frac{\int_a^b x\cdot(g^2(x)-f^2(x))\,dx}{2\cdot\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\,dx} \tag{2465}$$

$$P_{OX}=2\pi\cdot\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \qquad x_s=\frac{\int_a^b x\cdot f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx} \tag{2821}$$

$$P_{OY}=2\pi\cdot\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \qquad y_s=\frac{\int_a^b x\cdot f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx} \tag{6601}$$