KOLOKWIUM nr 1, 28.02.2024, godz. 14:15–15:45

Zadanie **1. (10 punktów)**

Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna, a jej pochodna jest dana wzorem

$$f'(x)=\left|x-x^3\right| .$$

Ponadto wiadomo, że $f(-2)=-2$. Wyznaczyć $f(2)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f'(x)=\begin{cases} x-x^3 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,-1) \\ x^3-x & \text{dla} \quad x\in[-1,\,0) \\ x-x^3 & \text{dla} \quad x\in[0,\,1) \\ x^3-x & \text{dla} \quad x\in[1,\,+\infty) \end{cases}$$

Wobec tego

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{4}+C_1 & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,-1) \\ \dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}+C_2 & \text{dla} \quad x\in[-1,\,0) \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{4}+C_3 & \text{dla} \quad x\in[0,\,1) \\ \dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}+C_4 & \text{dla} \quad x\in[1,\,+\infty) \end{cases}$$

Aby powyższa funkcja była poprawnie określona i ciągła w $x=-1$, $x=0$ i $x=1$ muszą zachodzić równości:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+C_1 = \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+C_2 & (x=-1) \\ C_2 = C_3 & (x=0) \\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+C_3 = \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}+C_4 & (x=1) \end{cases}$$

czyli

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}+C_1 = C_2 \\ C_2 = C_3 \\ \dfrac{1}{2}+C_3 = C_4 \end{cases}$$

Ponadto warunek $f(-2)=-2$ prowadzi do równości

$$-2=f(-2)=\frac{4}{2}-\frac{16}{4}+C_1=2-4+C_1=-2+C_1\,,$$

skąd $C_1=0$ i w konsekwencji $C_2=C_3=1/2$ oraz $C_4=1$.

Ostatecznie

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{4} & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,-1) \\ \dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2} & \text{dla} \quad x\in[-1,\,0) \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{1}{2} & \text{dla} \quad x\in[0,\,1) \\ \dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}+1 & \text{dla} \quad x\in[1,\,+\infty) \end{cases}$$

Zatem

$$f(2)=\frac{16}{4}-\frac{4}{2}+C_4=4-2+1=3\,.$$

Odpowiedź: $f(2)=3$.

Zadanie **2. (10 punktów)**
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int e^{4x}\cdot\sin(3x)\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Oznaczamy szukaną całkę przez $I(x)$, a następnie całkujemy dwukrotnie przez części całkując e^{4x} i różniczkując[1] $\sin 3x$. Otrzymujemy

$$I(x)=\int e^{4x}\cdot\sin 3x\,dx=\frac{e^{4x}}{4}\cdot\sin 3x-\frac{3}{4}\cdot\int e^{4x}\cdot\cos 3x\,dx=$$

$$=\frac{e^{4x}}{4}\cdot\sin 3x-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{e^{4x}}{4}\cdot\cos 3x+\frac{3}{4}\cdot\int e^{4x}\cdot\sin 3x\,dx\right)=$$

$$=\frac{e^{4x}}{4}\cdot\sin 3x-\frac{3}{16}\cdot e^{4x}\cdot\cos 3x-\frac{9}{16}\cdot I(x)\,,$$

skąd

$$\frac{25}{16}\cdot I(x)=\frac{4\cdot e^{4x}\sin 3x-3\cdot e^{4x}\cdot\cos 3x}{16}+C_0$$

i ostatecznie

$$I(x)=\frac{4\cdot e^{4x}\sin 3x-3\cdot e^{4x}\cdot\cos 3x}{25}+C\,.$$

Odpowiedź:

$$\int e^{4x}\cdot\sin 3x\,dx=\frac{4\cdot e^{4x}\sin 3x-3\cdot e^{4x}\cdot\cos 3x}{25}+C\,.$$

[1]W wyrażeniu $\sin 3x$ nie ma potrzeby ujmowania argumentu sinusa w nawias. W treści zadania nawias jest po to, aby uniknąć jakichkolwiek wątpliwości.

Zadanie **3. (10 punktów)**
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{x+7}}\,.$$

Rozwiązanie:
Całkujemy dwukrotnie przez części różniczkując czynnik x^2 i wykorzystując fakt, że potęgę dwumianu liniowego $x+7$ można wielokrotnie całkować:

$$\int x^2\cdot(x+7)^{-1/3}\,dx = \frac{3}{2}\cdot x^2\cdot(x+7)^{2/3} - 3\cdot\int x\cdot(x+7)^{2/3}\,dx =$$
$$= \frac{3}{2}\cdot x^2\cdot(x+7)^{2/3} - \frac{9}{5}\cdot x\cdot(x+7)^{5/3} + \frac{9}{5}\int 1\cdot(x+7)^{5/3}\,dx =$$
$$= \frac{3}{2}\cdot x^2\cdot(x+7)^{2/3} - \frac{9}{5}\cdot x\cdot(x+7)^{5/3} + \frac{27}{40}\cdot(x+7)^{8/3} + C\,.$$

Odpowiedź:

$$\int x^2\cdot(x+7)^{-1/3}\,dx = \frac{3}{2}\cdot x^2\cdot(x+7)^{2/3} - \frac{9}{5}\cdot x\cdot(x+7)^{5/3} + \frac{27}{40}\cdot(x+7)^{8/3} + C\,.$$

Uwaga: Całkę można też obliczyć wykonując podstawienie $t=x+7$.

Zadanie **4. (10 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \left(x^4+1\right)\cdot\ln\left(x^4+5\right)\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik (x^4+1) i różniczkując $\ln(x^4+5)$. Otrzymujemy:

$$\int \left(x^4+1\right)\cdot\ln\left(x^4+5\right)\,dx=\left(\frac{x^5}{5}+x\right)\cdot\ln\left(x^4+5\right)-\int\left(\frac{x^5}{5}+x\right)\cdot\frac{4x^3}{x^4+5}\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}+x\right)\cdot\ln\left(x^4+5\right)-\int\frac{x\cdot(x^4+5)}{5}\cdot\frac{4x^3}{x^4+5}\,dx=$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}+x\right)\cdot\ln\left(x^4+5\right)-\frac{4}{5}\cdot\int x^4\,dx=\left(\frac{x^5}{5}+x\right)\cdot\ln\left(x^4+5\right)-\frac{4x^5}{25}+C\,.$$

Odpowiedź:

$$\int \left(x^4+1\right)\cdot\ln\left(x^4+5\right)\,dx=\left(\frac{x^5}{5}+x\right)\cdot\ln\left(x^4+5\right)-\frac{4x^5}{25}+C\,.$$