Egzamin część II Wersja testu **A** 18 czerwca 2024 r.

ANALIZA 2 18 czerwca 2024 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

W każdym z zadań 1–12 za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

Zadanie **13** to zadanie dodatkowe z punktacją, która będzie ustalona w czasie sprawdzania.

Wzorki pomocne w tym zadaniu:

$$-\ln(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \qquad |z|\leqslant 1,\ z\neq 1$$

$$\ln z=\ln|z|+i\cdot\arg z \qquad \arg z\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.

Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.

Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.

Egzamin część II Wersja testu **A** 18 czerwca 2024 r.

1. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{5} \big||x-2|-2\big|\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$ b) $\int\limits_{-1}^{7} \big||x-2|-2\big|\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\int\limits_{-3}^{5} \big||x-2|-2\big|\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$ d) $\int\limits_{-3}^{7} \big||x-2|-2\big|\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{0}^{1} x^8 \cdot \left(x^9+1\right)^5 dx = \ldots\ldots\ldots$ b) $\int\limits_{0}^{1} x^{30} \cdot \left(x^{31}+1\right)^4 dx = \ldots\ldots\ldots$

c) $\int\limits_{0}^{1} x^4 \cdot \left(x^5+1\right)^3 dx = \ldots\ldots\ldots$ d) $\int\limits_{0}^{1} x^{20} \cdot \left(x^{21}+1\right)^2 dx = \ldots\ldots\ldots$

3. Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[6]{x^{36}+x^{30}}\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$ b) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[4]{x^{16}+x^{12}}\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[10]{x^{100}+x^{90}}\,dx = \ldots\ldots\ldots$ d) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[8]{x^{64}+x^{56}}\,dx = \ldots\ldots\ldots$

4. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{10} \cdot e^{x^3}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(400)}(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ b) $f^{(40)}(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $f^{(70)}(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ d) $f^{(100)}(0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5. Podaj wartość całki oznaczonej, gdzie [.] oznacza część całkowitą.

a) $\int\limits_0^{10} [x]\, dx =$ .... b) $\int\limits_0^{21} [x]\, dx =$ ....

c) $\int\limits_0^{11} [x]\, dx =$ .... d) $\int\limits_0^{41} [x]\, dx =$ ....

6. Niech $C(k) = \int\limits_0^{k\pi} \sqrt[k]{\cos^k x}\, dx$. Wówczas

a) $C(6) =$ .... b) $C(4) =$ ....

c) $C(2) =$ .... d) $C(3) =$ ....

7. Podaj sumę szeregu:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{4} - \sqrt[n+1]{4} \right) =$ .... b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{9} - \sqrt[n+1]{9} \right) =$ ....

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{9} - \sqrt[n+2]{9} \right) =$ .... d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{4} - \sqrt[n+2]{4} \right) =$ ....

8. Jeżeli $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ oraz $C(m,n) = \int\limits_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x)\, dx$, to:

a) $C(36, 100) =$ .... b) $C(25, 36) =$ ....

c) $C(16, 25) =$ .... d) $C(9, 16) =$ ....

9. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{3n} \frac{k^2}{k^3+n^3} =$ .... b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{3n} \frac{k^2}{k^3+n^3} =$ ....

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{k^3+n^3} =$ .... d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{4n} \frac{k^2}{k^3+n^3} =$ ....

10. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{7n}\frac{n}{k^2+49n^2}=\dots\dots\dots$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{5n}\frac{n}{k^2+25n^2}=\dots\dots\dots$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{n}{k^2+4n^2}=\dots\dots\dots$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\frac{n}{k^2+9n^2}=\dots\dots\dots$

11. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^4n^5}{k^{10}+3n^{10}}=\dots\dots\dots$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+3n^2}=\dots\dots\dots$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{kn^2}{k^4+3n^4}=\dots\dots\dots$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2n^3}{k^6+3n^6}=\dots\dots\dots$

12. Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\frac{1}{x^{12}+60x^6+1033}$, $\|f\|=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

b) $f(x)=\frac{1}{x^{16}+60x^8+1055}$, $\|f\|=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

c) $f(x)=\frac{1}{x^{20}-60x^{10}+1077}$, $\|f\|=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

d) $f(x)=\frac{1}{x^{10}+60x^5+1022}$, $\|f\|=\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

13. Niech $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$. Wówczas:

a) $f(-i)=\dots\dots\dots\dots$ b) $f\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)=\dots\dots\dots\dots$

c) $f(i)=\dots\dots\dots\dots$ d) $f\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=\dots\dots\dots\dots$