**Egzamin część II** Wersja testu **A** 18 czerwca 2024 r.

**ANALIZA 2** 18 czerwca 2024 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

**W każdym z zadań 1–12 za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.**

Zadanie **13** to zadanie dodatkowe z punktacją, która będzie ustalona w czasie sprawdzania.

Wzorki pomocne w tym zadaniu:

$$-\ln(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \qquad |z|\leqslant 1,\ z\neq 1$$

$$\ln z=\ln|z|+i\cdot\arg z \qquad \arg z\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

**Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.**

**Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.**

**Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.**

**Egzamin część II** Wersja testu **A** 18 czerwca 2024 r.

**1.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_{-1}^{5} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{5}$

b) $\int_{-1}^{7} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{9}$

c) $\int_{-3}^{5} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{9}$

d) $\int_{-3}^{7} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{13}$

**2.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_{0}^{1} x^8 \cdot \left(x^9+1\right)^5 dx = \mathbf{7/6}$

b) $\int_{0}^{1} x^{30} \cdot \left(x^{31}+1\right)^4 dx = \mathbf{1/5}$

c) $\int_{0}^{1} x^4 \cdot \left(x^5+1\right)^3 dx = \mathbf{3/4}$

d) $\int_{0}^{1} x^{20} \cdot \left(x^{21}+1\right)^2 dx = \mathbf{1/9}$

**3.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int_{-1}^{0} \sqrt[6]{x^{36}+x^{30}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{7/6}-1}}{\mathbf{7}}$

b) $\int_{-1}^{0} \sqrt[4]{x^{16}+x^{12}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{5/4}-1}}{\mathbf{5}}$

c) $\int_{-1}^{0} \sqrt[10]{x^{100}+x^{90}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{11/10}-1}}{\mathbf{11}}$

d) $\int_{-1}^{0} \sqrt[8]{x^{64}+x^{56}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{9/8}-1}}{\mathbf{9}}$

**4.** Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{10}\cdot e^{x^3}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(400)}(0) = \mathbf{400!/130!}$

b) $f^{(40)}(0) = \mathbf{40!/10!}$

c) $f^{(70)}(0) = \mathbf{70!/20!}$

d) $f^{(100)}(0) = \mathbf{100!/30!}$

**5.** Podaj wartość całki oznaczonej, gdzie [.] oznacza część całkowitą.

a) $\int\limits_0^{10} [x]\,dx = \mathbf{45}$ b) $\int\limits_0^{21} [x]\,dx = \mathbf{210}$

c) $\int\limits_0^{11} [x]\,dx = \mathbf{55}$ d) $\int\limits_0^{41} [x]\,dx = \mathbf{820}$

**6.** Niech $C(k) = \int\limits_0^{k\pi} \sqrt[k]{\cos^k x}\,dx$ . Wówczas

a) $C(6) = \mathbf{12}$ b) $C(4) = \mathbf{8}$

c) $C(2) = \mathbf{4}$ d) $C(3) = \mathbf{0}$

**7.** Podaj sumę szeregu:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{4} - \sqrt[n+1]{4} \right) = \mathbf{3}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{9} - \sqrt[n+1]{9} \right) = \mathbf{8}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{9} - \sqrt[n+2]{9} \right) = \mathbf{10}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{4} - \sqrt[n+2]{4} \right) = \mathbf{4}$

**8.** Jeżeli $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ oraz $C(m,n) = \int\limits_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x)\,dx$, to:

a) $C(36, 100) = \mathbf{36\pi}$ b) $C(25, 36) = \mathbf{25\pi}$

c) $C(16, 25) = \mathbf{16\pi}$ d) $C(9, 16) = \mathbf{9\pi}$

**9.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{3n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \mathbf{\frac{\ln 14}{3}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{3n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \mathbf{\frac{\ln 28}{3}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \mathbf{\frac{\ln 9}{3}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{4n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \mathbf{\frac{\ln 65}{3}}$

**10.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{7n}\frac{n}{k^2+49n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{28}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{5n}\frac{n}{k^2+25n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{20}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{n}{k^2+4n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\frac{n}{k^2+9n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$

**11.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^4n^5}{k^{10}+3n^{10}}=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{90}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+3n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{18}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{kn^2}{k^4+3n^4}=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{36}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2n^3}{k^6+3n^6}=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{54}}$

**12.** Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\frac{1}{x^{12}+60x^6+1033}$, $\|f\|=\mathbf{1/1033}$

b) $f(x)=\frac{1}{x^{16}+60x^8+1055}$, $\|f\|=\mathbf{1/1055}$

c) $f(x)=\frac{1}{x^{20}-60x^{10}+1077}$, $\|f\|=\mathbf{1/177}$

d) $f(x)=\frac{1}{x^{10}+60x^5+1022}$, $\|f\|=\mathbf{1/122}$

**13.** Niech $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$. Wówczas:

a) $f(-i)=\boldsymbol{-\frac{\ln 2}{2}-\frac{\pi i}{4}}$ b) $f\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{-\ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+\frac{\pi i}{8}}$

c) $f(i)=\boldsymbol{-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi i}{4}}$ d) $f\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{-\ln\sqrt{2-\sqrt{2}}+\frac{3\pi i}{8}}$

**Egzamin część II** Wersja testu **B** 18 czerwca 2024 r.

**ANALIZA 2** 18 czerwca 2024 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

**W każdym z zadań 1–12 za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.**

Zadanie **13** to zadanie dodatkowe z punktacją, która będzie ustalona w czasie sprawdzania.

Wzorki pomocne w tym zadaniu:

$$-\ln(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \qquad |z|\leqslant 1,\ z\neq 1$$

$$\ln z=\ln|z|+i\cdot\arg z \qquad \arg z\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

**Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.**

**Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.**

**Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.**

**Egzamin część II** Wersja testu **B** 18 czerwca 2024 r.

**1.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-3}^{5} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{9}$ b) $\int\limits_{-1}^{7} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{9}$

c) $\int\limits_{-1}^{5} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{5}$ d) $\int\limits_{-3}^{7} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{13}$

**2.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{0}^{1} x^{20}\cdot\left(x^{21}+1\right)^2\,dx = \mathbf{1/9}$ b) $\int\limits_{0}^{1} x^{4}\cdot\left(x^{5}+1\right)^3\,dx = \mathbf{3/4}$

c) $\int\limits_{0}^{1} x^{8}\cdot\left(x^{9}+1\right)^5\,dx = \mathbf{7/6}$ d) $\int\limits_{0}^{1} x^{30}\cdot\left(x^{31}+1\right)^4\,dx = \mathbf{1/5}$

**3.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[10]{x^{100}+x^{90}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{11/10}-1}}{\mathbf{11}}$ b) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[6]{x^{36}+x^{30}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{7/6}-1}}{\mathbf{7}}$

c) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[4]{x^{16}+x^{12}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{5/4}-1}}{\mathbf{5}}$ d) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[8]{x^{64}+x^{56}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{9/8}-1}}{\mathbf{9}}$

**4.** Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{10}\cdot e^{x^3}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(400)}(0) = \mathbf{400!/130!}$ b) $f^{(100)}(0) = \mathbf{100!/30!}$

c) $f^{(70)}(0) = \mathbf{70!/20!}$ d) $f^{(40)}(0) = \mathbf{40!/10!}$

**5.** Podaj wartość całki oznaczonej, gdzie [.] oznacza część całkowitą.

a) $\int\limits_0^{41} [x]\, dx = \mathbf{820}$ b) $\int\limits_0^{21} [x]\, dx = \mathbf{210}$

c) $\int\limits_0^{11} [x]\, dx = \mathbf{55}$ d) $\int\limits_0^{10} [x]\, dx = \mathbf{45}$

**6.** Niech $C(k) = \int\limits_0^{k\pi} \sqrt[k]{\cos^k x}\, dx$ . Wówczas

a) $C(4) = \mathbf{8}$ b) $C(3) = \mathbf{0}$

c) $C(6) = \mathbf{12}$ d) $C(2) = \mathbf{4}$

**7.** Podaj sumę szeregu:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{4} - \sqrt[n+1]{4}\right) = \mathbf{3}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{9} - \sqrt[n+1]{9}\right) = \mathbf{8}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{4} - \sqrt[n+2]{4}\right) = \mathbf{4}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{9} - \sqrt[n+2]{9}\right) = \mathbf{10}$

**8.** Jeżeli $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ oraz $C(m,n) = \int\limits_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x)\, dx$, to:

a) $C(9,16) = \boldsymbol{9\pi}$ b) $C(25,36) = \boldsymbol{25\pi}$

c) $C(16,25) = \boldsymbol{16\pi}$ d) $C(36,100) = \boldsymbol{36\pi}$

**9.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{3n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \mathbf{\frac{ln28}{3}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{4n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \mathbf{\frac{ln65}{3}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \mathbf{\frac{ln9}{3}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{3n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \mathbf{\frac{ln14}{3}}$

**10.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\dfrac{n}{k^2+9n^2}=\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{7n}\dfrac{n}{k^2+49n^2}=\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{28}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{5n}\dfrac{n}{k^2+25n^2}=\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{n}{k^2+4n^2}=\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{8}}$

**11.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2n^3}{k^6+3n^6}=\dfrac{\boldsymbol{\pi}\cdot\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{54}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^4n^5}{k^{10}+3n^{10}}=\dfrac{\boldsymbol{\pi}\cdot\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{90}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{kn^2}{k^4+3n^4}=\dfrac{\boldsymbol{\pi}\cdot\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{36}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{k^2+3n^2}=\dfrac{\boldsymbol{\pi}\cdot\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{18}}$

**12.** Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^{12}+60x^6+1033}$, $\quad\|f\|=\mathbf{1/1033}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^{16}+60x^8+1055}$, $\quad\|f\|=\mathbf{1/1055}$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^{10}+60x^5+1022}$, $\quad\|f\|=\mathbf{1/122}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x^{20}-60x^{10}+1077}$, $\quad\|f\|=\mathbf{1/177}$

**13.** Niech $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$. Wówczas:

a) $f\left(\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)=\mathbf{-\ln\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\dfrac{\boldsymbol{\pi}\mathbf{i}}{\mathbf{8}}$

b) $f(-i)=-\dfrac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{2}}-\dfrac{\boldsymbol{\pi}\mathbf{i}}{\mathbf{4}}$

c) $f\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=\mathbf{-\ln\sqrt{2-\sqrt{2}}}+\dfrac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}\mathbf{i}}{\mathbf{8}}$

d) $f(i)=-\dfrac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{2}}+\dfrac{\boldsymbol{\pi}\mathbf{i}}{\mathbf{4}}$

**Egzamin część II** Wersja testu **C** 18 czerwca 2024 r.

**ANALIZA 2** 18 czerwca 2024 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

**W każdym z zadań 1–12 za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.**

Zadanie **13** to zadanie dodatkowe z punktacją, która będzie ustalona w czasie sprawdzania.

Wzorki pomocne w tym zadaniu:

$$-\ln(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \qquad |z|\leqslant 1,\ z\neq 1$$

$$\ln z=\ln|z|+i\cdot\arg z \qquad \arg z\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

**Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.**

**Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.**

**Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry**

**NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.**

**Egzamin część II** Wersja testu **C** 18 czerwca 2024 r.

**1.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-3}^{5} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{9}$ b) $\int\limits_{-1}^{5} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{5}$

c) $\int\limits_{-3}^{7} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{13}$ d) $\int\limits_{-1}^{7} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{9}$

**2.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{0}^{1} x^8 \cdot \left(x^9+1\right)^5 dx = \mathbf{7/6}$ b) $\int\limits_{0}^{1} x^4 \cdot \left(x^5+1\right)^3 dx = \mathbf{3/4}$

c) $\int\limits_{0}^{1} x^{20} \cdot \left(x^{21}+1\right)^2 dx = \mathbf{1/9}$ d) $\int\limits_{0}^{1} x^{30} \cdot \left(x^{31}+1\right)^4 dx = \mathbf{1/5}$

**3.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[4]{x^{16}+x^{12}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{5/4}-1}}{\mathbf{5}}$ b) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[6]{x^{36}+x^{30}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{7/6}-1}}{\mathbf{7}}$

c) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[10]{x^{100}+x^{90}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{11/10}-1}}{\mathbf{11}}$ d) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[8]{x^{64}+x^{56}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{9/8}-1}}{\mathbf{9}}$

**4.** Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{10}\cdot e^{x^3}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(400)}(0) = \mathbf{400!/130!}$ b) $f^{(70)}(0) = \mathbf{70!/20!}$

c) $f^{(100)}(0) = \mathbf{100!/30!}$ d) $f^{(40)}(0) = \mathbf{40!/10!}$

**5.** Podaj wartość całki oznaczonej, gdzie [.] oznacza część całkowitą.

a) $\int_0^{11} [x]\,dx = \mathbf{55}$ b) $\int_0^{10} [x]\,dx = \mathbf{45}$

c) $\int_0^{41} [x]\,dx = \mathbf{820}$ d) $\int_0^{21} [x]\,dx = \mathbf{210}$

**6.** Niech $C(k) = \int_0^{k\pi} \sqrt[k]{\cos^k x}\,dx$ . Wówczas

a) $C(4) = \mathbf{8}$ b) $C(3) = \mathbf{0}$

c) $C(6) = \mathbf{12}$ d) $C(2) = \mathbf{4}$

**7.** Podaj sumę szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{9} - \sqrt[n+1]{9}\right) = \mathbf{8}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{4} - \sqrt[n+2]{4}\right) = \mathbf{4}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{4} - \sqrt[n+1]{4}\right) = \mathbf{3}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{9} - \sqrt[n+2]{9}\right) = \mathbf{10}$

**8.** Jeżeli $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$ oraz $C(m,n) = \int_0^{2\pi} f_m(x)\cdot f_n(x)\,dx$, to:

a) $C(36, 100) = \mathbf{36\pi}$ b) $C(25, 36) = \mathbf{25\pi}$

c) $C(16, 25) = \mathbf{16\pi}$ d) $C(9, 16) = \mathbf{9\pi}$

**9.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{3n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \frac{\mathbf{ln28}}{\mathbf{3}}$ b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{3n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \frac{\mathbf{ln14}}{\mathbf{3}}$

c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \frac{\mathbf{ln9}}{\mathbf{3}}$ d) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{4n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \frac{\mathbf{ln65}}{\mathbf{3}}$

**10.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{n}{k^2+4n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{7n}\frac{n}{k^2+49n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{28}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{5n}\frac{n}{k^2+25n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{20}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\frac{n}{k^2+9n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$

**11.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^4n^5}{k^{10}+3n^{10}}=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{90}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{kn^2}{k^4+3n^4}=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{36}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+3n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{18}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2n^3}{k^6+3n^6}=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{54}}$

**12.** Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\frac{1}{x^{16}+60x^8+1055}$, $\quad\|f\|=\mathbf{1/1055}$

b) $f(x)=\frac{1}{x^{20}-60x^{10}+1077}$, $\quad\|f\|=\mathbf{1/177}$

c) $f(x)=\frac{1}{x^{10}+60x^5+1022}$, $\quad\|f\|=\mathbf{1/122}$

d) $f(x)=\frac{1}{x^{12}+60x^6+1033}$, $\quad\|f\|=\mathbf{1/1033}$

**13.** Niech $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$. Wówczas:

a) $f(i)=\boldsymbol{-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi i}{4}}$

b) $f\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{-\ln\sqrt{2-\sqrt{2}}+\frac{3\pi i}{8}}$

c) $f(-i)=\boldsymbol{-\frac{\ln 2}{2}-\frac{\pi i}{4}}$

d) $f\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{-\ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+\frac{\pi i}{8}}$

**Egzamin część II** Wersja testu **D** 18 czerwca 2024 r.

**ANALIZA 2** 18 czerwca 2024 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

**W każdym z zadań 1–12 za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.**

Zadanie **13** to zadanie dodatkowe z punktacją, która będzie ustalona w czasie sprawdzania.

Wzorki pomocne w tym zadaniu:

$$-\ln(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \qquad |z|\leqslant 1,\ z\neq 1$$

$$\ln z=\ln|z|+i\cdot\arg z \qquad \arg z\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

**Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.**

**Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.**

**Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry**

**NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.**

**Egzamin część II** Wersja testu **D** 18 czerwca 2024 r.

**1.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{5} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{5}$

b) $\int\limits_{-3}^{7} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{13}$

c) $\int\limits_{-1}^{7} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{9}$

d) $\int\limits_{-3}^{5} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{9}$

**2.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{0}^{1} x^8 \cdot \left(x^9+1\right)^5 dx = \mathbf{7/6}$

b) $\int\limits_{0}^{1} x^{20} \cdot \left(x^{21}+1\right)^2 dx = \mathbf{1/9}$

c) $\int\limits_{0}^{1} x^{30} \cdot \left(x^{31}+1\right)^4 dx = \mathbf{1/5}$

d) $\int\limits_{0}^{1} x^4 \cdot \left(x^5+1\right)^3 dx = \mathbf{3/4}$

**3.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[10]{x^{100}+x^{90}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{11/10}-1}}{\mathbf{11}}$

b) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[6]{x^{36}+x^{30}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{7/6}-1}}{\mathbf{7}}$

c) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[8]{x^{64}+x^{56}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{9/8}-1}}{\mathbf{9}}$

d) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[4]{x^{16}+x^{12}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{5/4}-1}}{\mathbf{5}}$

**4.** Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{10}\cdot e^{x^3}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(400)}(0) = \mathbf{400!/130!}$

b) $f^{(100)}(0) = \mathbf{100!/30!}$

c) $f^{(40)}(0) = \mathbf{40!/10!}$

d) $f^{(70)}(0) = \mathbf{70!/20!}$

**5.** Podaj wartość całki oznaczonej, gdzie [.] oznacza część całkowitą.

a) $\int\limits_0^{11} [x]\, dx = \mathbf{55}$

b) $\int\limits_0^{10} [x]\, dx = \mathbf{45}$

c) $\int\limits_0^{21} [x]\, dx = \mathbf{210}$

d) $\int\limits_0^{41} [x]\, dx = \mathbf{820}$

**6.** Niech $C(k) = \int\limits_0^{k\pi} \sqrt[k]{\cos^k x}\, dx$ . Wówczas

a) $C(4) = \mathbf{8}$

b) $C(3) = \mathbf{0}$

c) $C(6) = \mathbf{12}$

d) $C(2) = \mathbf{4}$

**7.** Podaj sumę szeregu:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{9} - \sqrt[n+2]{9} \right) = \mathbf{10}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{9} - \sqrt[n+1]{9} \right) = \mathbf{8}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{4} - \sqrt[n+2]{4} \right) = \mathbf{4}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{4} - \sqrt[n+1]{4} \right) = \mathbf{3}$

**8.** Jeżeli $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ oraz $C(m,n) = \int\limits_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x)\, dx$, to:

a) $C(36, 100) = \boldsymbol{36\pi}$

b) $C(25, 36) = \boldsymbol{25\pi}$

c) $C(16, 25) = \boldsymbol{16\pi}$

d) $C(9, 16) = \boldsymbol{9\pi}$

**9.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{3n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \frac{\mathbf{ln14}}{\mathbf{3}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \frac{\mathbf{ln9}}{\mathbf{3}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{3n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \frac{\mathbf{ln28}}{\mathbf{3}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{4n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \frac{\mathbf{ln65}}{\mathbf{3}}$

**10.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{3n}\frac{n}{k^2+9n^2}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}$ b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{n}{k^2+4n^2}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{8}}$

c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{7n}\frac{n}{k^2+49n^2}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{28}}$ d) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{5n}\frac{n}{k^2+25n^2}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{20}}$

**11.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4n^5}{k^{10}+3n^{10}}=\frac{\boldsymbol{\pi}\cdot\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{90}}$ b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2n^3}{k^6+3n^6}=\frac{\boldsymbol{\pi}\cdot\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{54}}$

c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+3n^2}=\frac{\boldsymbol{\pi}\cdot\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{18}}$ d) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn^2}{k^4+3n^4}=\frac{\boldsymbol{\pi}\cdot\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{36}}$

**12.** Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\frac{1}{x^{20}-60x^{10}+1077}$, $\|f\|=\mathbf{1/177}$

b) $f(x)=\frac{1}{x^{16}+60x^{8}+1055}$, $\|f\|=\mathbf{1/1055}$

c) $f(x)=\frac{1}{x^{12}+60x^{6}+1033}$, $\|f\|=\mathbf{1/1033}$

d) $f(x)=\frac{1}{x^{10}+60x^{5}+1022}$, $\|f\|=\mathbf{1/122}$

**13.** Niech $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$. Wówczas:

a) $f\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=\mathbf{-ln}\sqrt{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}}}+\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}\mathbf{i}}{\mathbf{8}}$ b) $f(-i)=-\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{2}}-\frac{\boldsymbol{\pi}\mathbf{i}}{\mathbf{4}}$

c) $f\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)=\mathbf{-ln}\sqrt{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{2}}}+\frac{\boldsymbol{\pi}\mathbf{i}}{\mathbf{8}}$ d) $f(i)=-\frac{\mathbf{ln2}}{\mathbf{2}}+\frac{\boldsymbol{\pi}\mathbf{i}}{\mathbf{4}}$

**Egzamin część II** Wersja testu **E** 18 czerwca 2024 r.

**ANALIZA 2** 18 czerwca 2024 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

**W każdym z zadań 1–12 za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.**

Zadanie **13** to zadanie dodatkowe z punktacją, która będzie ustalona w czasie sprawdzania.

Wzorki pomocne w tym zadaniu:

$$-\ln(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \qquad |z|\leqslant 1,\ z\neq 1$$

$$\ln z=\ln|z|+i\cdot\arg z \qquad \arg z\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

**Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.**

**Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.**

**Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry**

**NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.**

**Egzamin część II** Wersja testu **E** 18 czerwca 2024 r.

**1.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{7} \Big||x-2|-2\Big|\, dx = \mathbf{9}$ b) $\int\limits_{-1}^{5} \Big||x-2|-2\Big|\, dx = \mathbf{5}$

c) $\int\limits_{-3}^{5} \Big||x-2|-2\Big|\, dx = \mathbf{9}$ d) $\int\limits_{-3}^{7} \Big||x-2|-2\Big|\, dx = \mathbf{13}$

**2.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{0}^{1} x^4 \cdot \left(x^5+1\right)^3 dx = \mathbf{3/4}$ b) $\int\limits_{0}^{1} x^{30} \cdot \left(x^{31}+1\right)^4 dx = \mathbf{1/5}$

c) $\int\limits_{0}^{1} x^{20} \cdot \left(x^{21}+1\right)^2 dx = \mathbf{1/9}$ d) $\int\limits_{0}^{1} x^8 \cdot \left(x^9+1\right)^5 dx = \mathbf{7/6}$

**3.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[8]{x^{64}+x^{56}}\, dx = \dfrac{\mathbf{2^{9/8}-1}}{\mathbf{9}}$ b) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[6]{x^{36}+x^{30}}\, dx = \dfrac{\mathbf{2^{7/6}-1}}{\mathbf{7}}$

c) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[10]{x^{100}+x^{90}}\, dx = \dfrac{\mathbf{2^{11/10}-1}}{\mathbf{11}}$ d) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[4]{x^{16}+x^{12}}\, dx = \dfrac{\mathbf{2^{5/4}-1}}{\mathbf{5}}$

**4.** Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{10} \cdot e^{x^3} .$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(70)}(0) = \mathbf{70!/20!}$ b) $f^{(100)}(0) = \mathbf{100!/30!}$

c) $f^{(400)}(0) = \mathbf{400!/130!}$ d) $f^{(40)}(0) = \mathbf{40!/10!}$

**5.** Podaj wartość całki oznaczonej, gdzie [.] oznacza część całkowitą.

a) $\int\limits_0^{21} [x]\, dx = \mathbf{210}$ b) $\int\limits_0^{41} [x]\, dx = \mathbf{820}$

c) $\int\limits_0^{10} [x]\, dx = \mathbf{45}$ d) $\int\limits_0^{11} [x]\, dx = \mathbf{55}$

**6.** Niech $C(k) = \int\limits_0^{k\pi} \sqrt[k]{\cos^k x}\, dx$ . Wówczas

a) $C(3) = \mathbf{0}$ b) $C(4) = \mathbf{8}$

c) $C(6) = \mathbf{12}$ d) $C(2) = \mathbf{4}$

**7.** Podaj sumę szeregu:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{4} - \sqrt[n+1]{4} \right) = \mathbf{3}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{9} - \sqrt[n+2]{9} \right) = \mathbf{10}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{4} - \sqrt[n+2]{4} \right) = \mathbf{4}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{9} - \sqrt[n+1]{9} \right) = \mathbf{8}$

**8.** Jeżeli $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ oraz $C(m, n) = \int\limits_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x)\, dx$, to:

a) $C(16, 25) = \mathbf{16\pi}$ b) $C(9, 16) = \mathbf{9\pi}$

c) $C(25, 36) = \mathbf{25\pi}$ d) $C(36, 100) = \mathbf{36\pi}$

**9.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{k^3 + n^3} = \mathbf{\frac{ln 9}{3}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{4n} \frac{k^2}{k^3 + n^3} = \mathbf{\frac{ln 65}{3}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{3n} \frac{k^2}{k^3 + n^3} = \mathbf{\frac{ln 28}{3}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{3n} \frac{k^2}{k^3 + n^3} = \mathbf{\frac{ln 14}{3}}$

**10.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\frac{n}{k^2+9n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{n}{k^2+4n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{7n}\frac{n}{k^2+49n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{28}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{5n}\frac{n}{k^2+25n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{20}}$

**11.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2n^3}{k^6+3n^6}=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{54}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^4n^5}{k^{10}+3n^{10}}=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{90}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+3n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{18}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{kn^2}{k^4+3n^4}=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{36}}$

**12.** Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\frac{1}{x^{10}+60x^5+1022}$, $\|f\|=\mathbf{1/122}$

b) $f(x)=\frac{1}{x^{16}+60x^8+1055}$, $\|f\|=\mathbf{1/1055}$

c) $f(x)=\frac{1}{x^{20}-60x^{10}+1077}$, $\|f\|=\mathbf{1/177}$

d) $f(x)=\frac{1}{x^{12}+60x^6+1033}$, $\|f\|=\mathbf{1/1033}$

**13.** Niech $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$. Wówczas:

a) $f(i)=\boldsymbol{-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi i}{4}}$

b) $f\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{-\ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+\frac{\pi i}{8}}$

c) $f\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{-\ln\sqrt{2-\sqrt{2}}+\frac{3\pi i}{8}}$

d) $f(-i)=\boldsymbol{-\frac{\ln 2}{2}-\frac{\pi i}{4}}$

**Egzamin część II** Wersja testu **F** 18 czerwca 2024 r.

**ANALIZA 2** 18 czerwca 2024 r., godz. 11:20–13:20

Wykładowca: Jarosław Wróblewski

**W każdym z zadań 1–12 za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.**

Zadanie **13** to zadanie dodatkowe z punktacją, która będzie ustalona w czasie sprawdzania.

Wzorki pomocne w tym zadaniu:

$$-\ln(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \qquad |z|\leqslant 1,\ z\neq 1$$

$$\ln z=\ln|z|+i\cdot\arg z \qquad \arg z\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

**Podczas rozwiązywania testu nie wolno korzystać z kalkulatorów.**

**Odpowiedzi należy podawać w postaci uproszczonej.**

**Pisz czytelnie, nieczytelne litery i cyfry NIE BĘDĄ interpretowane na Twoją korzyść.**

**Egzamin część II** Wersja testu **F** 18 czerwca 2024 r.

**1.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-3}^{5} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{9}$ b) $\int\limits_{-1}^{5} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{5}$

c) $\int\limits_{-3}^{7} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{13}$ d) $\int\limits_{-1}^{7} \Big||x-2|-2\Big|\,dx = \mathbf{9}$

**2.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{0}^{1} x^{20} \cdot \left(x^{21}+1\right)^2 dx = \mathbf{1/9}$ b) $\int\limits_{0}^{1} x^{8} \cdot \left(x^{9}+1\right)^5 dx = \mathbf{7/6}$

c) $\int\limits_{0}^{1} x^{4} \cdot \left(x^{5}+1\right)^3 dx = \mathbf{3/4}$ d) $\int\limits_{0}^{1} x^{30} \cdot \left(x^{31}+1\right)^4 dx = \mathbf{1/5}$

**3.** Podaj wartość całki oznaczonej.

a) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[8]{x^{64}+x^{56}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{9/8}-1}}{\mathbf{9}}$ b) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[4]{x^{16}+x^{12}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{5/4}-1}}{\mathbf{5}}$

c) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[6]{x^{36}+x^{30}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{7/6}-1}}{\mathbf{7}}$ d) $\int\limits_{-1}^{0} \sqrt[10]{x^{100}+x^{90}}\,dx = \dfrac{\mathbf{2^{11/10}-1}}{\mathbf{11}}$

**4.** Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{10} \cdot e^{x^3}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(100)}(0) = \mathbf{100!/30!}$ b) $f^{(400)}(0) = \mathbf{400!/130!}$

c) $f^{(70)}(0) = \mathbf{70!/20!}$ d) $f^{(40)}(0) = \mathbf{40!/10!}$

**5.** Podaj wartość całki oznaczonej, gdzie [.] oznacza część całkowitą.

a) $\int\limits_0^{11} [x]\, dx = \mathbf{55}$ b) $\int\limits_0^{21} [x]\, dx = \mathbf{210}$

c) $\int\limits_0^{41} [x]\, dx = \mathbf{820}$ d) $\int\limits_0^{10} [x]\, dx = \mathbf{45}$

**6.** Niech $C(k) = \int\limits_0^{k\pi} \sqrt[k]{\cos^k x}\, dx$ . Wówczas

a) $C(6) = \mathbf{12}$ b) $C(3) = \mathbf{0}$

c) $C(4) = \mathbf{8}$ d) $C(2) = \mathbf{4}$

**7.** Podaj sumę szeregu:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{4} - \sqrt[n+1]{4} \right) = \mathbf{3}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{4} - \sqrt[n+2]{4} \right) = \mathbf{4}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{9} - \sqrt[n+1]{9} \right) = \mathbf{8}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{9} - \sqrt[n+2]{9} \right) = \mathbf{10}$

**8.** Jeżeli $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ oraz $C(m,n) = \int\limits_0^{2\pi} f_m(x) \cdot f_n(x)\, dx$, to:

a) $C(9,16) = \mathbf{9\pi}$ b) $C(16,25) = \mathbf{16\pi}$

c) $C(25,36) = \mathbf{25\pi}$ d) $C(36,100) = \mathbf{36\pi}$

**9.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{3n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \mathbf{\frac{\ln 14}{3}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{4n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \mathbf{\frac{\ln 65}{3}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \mathbf{\frac{\ln 9}{3}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{3n} \frac{k^2}{k^3+n^3} = \mathbf{\frac{\ln 28}{3}}$

**10.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{5n}\frac{n}{k^2+25n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{20}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{n}{k^2+4n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}\frac{n}{k^2+9n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{12}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{7n}\frac{n}{k^2+49n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi}{28}}$

**11.** Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+3n^2}=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{18}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^4n^5}{k^{10}+3n^{10}}=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{90}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2n^3}{k^6+3n^6}=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{54}}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{kn^2}{k^4+3n^4}=\boldsymbol{\frac{\pi\cdot\sqrt{3}}{36}}$

**12.** Podaj normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem.

a) $f(x)=\frac{1}{x^{12}+60x^6+1033}$, $\|f\|=\mathbf{1/1033}$

b) $f(x)=\frac{1}{x^{16}+60x^8+1055}$, $\|f\|=\mathbf{1/1055}$

c) $f(x)=\frac{1}{x^{20}-60x^{10}+1077}$, $\|f\|=\mathbf{1/177}$

d) $f(x)=\frac{1}{x^{10}+60x^5+1022}$, $\|f\|=\mathbf{1/122}$

**13.** Niech $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$. Wówczas:

a) $f(i)=\boldsymbol{-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi i}{4}}$ b) $f\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{-\ln\sqrt{2-\sqrt{2}}+\frac{3\pi i}{8}}$

c) $f\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{-\ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+\frac{\pi i}{8}}$ d) $f(-i)=\boldsymbol{-\frac{\ln 2}{2}-\frac{\pi i}{4}}$