

Egzamin, **18.06.2024**, godz. 9:00–11:00**Zadanie 1 (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} \sin^{37} x \cdot \cos 37x \, dx.$$

Zadanie 2 (10 punktów)

Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 8 \cdot \sqrt{x} + (x-1) \cdot \ln x \, dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

Zadanie 3 (10 punktów)Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych **dodatnich** parametru p , dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2p} + x^p}{\sqrt{x^9 + x^5}} \, dx$$

jest zbieżna.

Zadanie 4 (10 punktów)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+2) \cdot (x+8)}.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \ln p$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a w liczbą wymierną.**Zadanie 5 (10 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-3) \cdot (5n+7)}.$$

Zadanie 6 (10 punktów)

Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_{-25}^{25} \frac{dx}{x^2 + 10x + 125}.$$

Możesz otrzymać **6 punktów** za obliczenie całki oraz **4 punkty** za doprowadzenie wyniku do postaci niezawierającej "arctg".

Zadanie 7 (ZADANIE DODATKOWE)

Dany jest taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \geq 40.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \geq 640.$$

Zadanie 8 (ZADANIE DODATKOWE)

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \sqrt{x^4 + 9} + \sqrt[4]{1000x^2 - 900} \, dx.$$