Egzamin, 18.06.2024, godz. 9:00–11:00

Zadanie **1 (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej
$$\int_0^{2\pi} \sin^{37} x \cdot \cos 37x \, dx \, .$$

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja podcałkowa jest okresowa z okresem 2π, całka po pełnym okresie nie zależy od początku przedziału całkowania. Mamy więc
$$\int_0^{2\pi} \sin^{37} x \cdot \cos 37x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^{37} x \cdot \cos 37x \, dx \, ,$$
a ta całka ma wartość zero jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera.

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 0.

Zadanie **2 (10 punktów)**

Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 8\cdot\sqrt{x}+(x-1)\cdot\ln x\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

Rozwiązanie:

Sposób I (normalny)

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=8\cdot\sqrt{x}+(x-1)\cdot\ln x\,.$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}+\ln x+\frac{x-1}{x}=\frac{4}{\sqrt{x}}+\ln x+1-\frac{1}{x}$$

oraz

$$f''(x)=-\frac{2}{x^{3/2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x-2\cdot\sqrt{x}+1}{x^2}=\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{x^2}>0$$

dla $x\neq 1$, $x>0$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w całej swojej dziedzinie $(0,\infty)$, a więc także w przedziale całkowania $(1,2)$.

Zatem wykres funkcji f w przedziale całkowania leży powyżej stycznej do wykresu w punkcie $x=1$. Ponieważ $f(1)=8$ oraz $f'(1)=4$, dla $x\in(1,2]$ zachodzi nierówność

$$f(x)>8+4\cdot(x-1)=4x+4$$

i w konsekwencji

$$\int_1^2 8\cdot\sqrt{x}+(x-1)\cdot\ln x\,dx>\int_1^2 4x+4\,dx=10\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest większa od 10.

Uwaga: Obliczenia przybliżone przy użyciu komputera pokazują, że dana całka ma w przybliżeniu wartość 10,00161, różni się więc od 10 o mniej niż jedną sześćsetną.

Sposób II (dla fanatycznych miłośników rachunków)

Daną całkę oznaczoną daje się wyliczyć i ma ona wartość

$$\frac{32\cdot\sqrt{2}}{3}-\frac{61}{12}\,.$$

Teraz wystarczy "tylko" porównać tę liczbę z liczbą 10:

$$\frac{32\cdot\sqrt{2}}{3}-\frac{61}{12}\quad ???\quad 10\,,$$

$$128\cdot\sqrt{2}-61\quad ???\quad 120\,,$$

$$128\cdot\sqrt{2}\quad ???\quad 181\,,$$

$$2^{15}\quad ???\quad 181^2\,,$$

$$32768\quad >\quad 32761\,.$$

Zadanie **3 (10 punktów)**

Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych **dodatnich** parametru p, dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^\infty \frac{x^{2p}+x^p}{\sqrt{x^9+x^5}}\,dx$$

jest zbieżna.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{x^{2p}+x^p}{\sqrt{x^9+x^5}}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{2p}+x^p}{\sqrt{x^9+x^5}}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^{2p}+x^p}{\sqrt{x^9+x^5}}\,dx\,.$$

Zbadamy, dla których wartości parametru p całki występujące w powyższej sumie są zbieżne. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Po uwzględnieniu nierówności $2p>p$ otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^{2p}+x^p}{\sqrt{x^9+x^5}}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^p+x^p}{\sqrt{0+x^5}}\,dx = 2\cdot\int_0^1 \frac{dx}{x^{5/2-p}} < +\infty\,,$$

o ile $5/2-p<1$, czyli $p>3/2$.

Ponadto

$$\int_0^1 \frac{x^{2p}+x^p}{\sqrt{x^9+x^5}}\,dx \geqslant \int_0^1 \frac{0+x^p}{\sqrt{x^5+x^5}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int_0^1 \frac{dx}{x^{5/2-p}} = +\infty\,,$$

o ile $5/2-p\geqslant 1$, czyli $p\leqslant 3/2$.

Podobnie

$$\int_1^\infty \frac{x^{2p}+x^p}{\sqrt{x^9+x^5}}\,dx \leqslant \int_1^\infty \frac{x^{2p}+x^{2p}}{\sqrt{x^9+0}}\,dx = 2\cdot\int_1^\infty \frac{dx}{x^{9/2-2p}} < +\infty\,,$$

o ile $9/2-2p>1$, czyli $p<7/4$.

Ponadto

$$\int_1^\infty \frac{x^{2p}+x^p}{\sqrt{x^9+x^5}}\,dx \geqslant \int_1^\infty \frac{x^{2p}+0}{\sqrt{x^9+x^9}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int_1^\infty \frac{dx}{x^{9/2-2p}} = +\infty\,,$$

o ile $9/2-2p\leqslant 1$, czyli $p\geqslant 7/4$.

Wniosek: Jeżeli $3/2<p<7/4$, to obydwie całki powstałe z podziału przedziału całkowania są zbieżne, a więc i wyjściowa całka jest zbieżna. W przeciwnym razie jedna z tych całek jest rozbieżna, a zatem wyjściowa całka jest rozbieżna.

Odpowiedź: Podana całka jest zbieżna dla $p\in(3/2,\,7/4)$.

Uwaga 1: Świadomość konieczności wykonania wszystkich czterech oszacowań jest kluczowym elementem rozwiązania. Bez tego elementu zadanie nie może być uzanane za rozwiązane nawet przy poprawnej odpowiedzi i dwóch oszacowaniach, a rozwiązanie nie może być ocenione na więcej niż **4 punkty.**

Uwaga 2: Zadanie polega na udowodnieniu poprawności podanej odpowiedzi. Poprawną odpowiedź można odgadnąć stosując intuicyjne przymiarki w stylu: ten składnik jest dominujący, a pozostałe możemy zaniedbać. Takie postępowanie sprawdza się w zadaniu testowym, gdzie trzeba małym nakładem pracy odgadnąć poprawną odpowiedź bez podawania uzasadnienia. Jednak w przypadku zadania otwartego podanie samej tylko poprawnej odpowiedzi bez śladu oszacowań dowodzących jej poprawności nie stanowi rozwiązania zadania i w związku z tym nie może być ocenione na więcej niż **2 punkty.**

Zadanie **4 (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\cdot(x+2)\cdot(x+8)}\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\ln p$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x\cdot(x+2)\cdot(x+8)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+8}\,,$$

$$1=A\cdot(x+2)\cdot(x+8)+B\cdot x\cdot(x+8)+C\cdot x\cdot(x+2)\,.$$

Podstawiamy[1] za x wartości 0, -2 i -8 otrzymując odpowiednio

dla $x=0$ $\quad 1=16\cdot A,\quad$ skąd $\quad A=1/16,$

dla $x=-2$ $\quad 1=-12\cdot B,\quad$ skąd $\quad B=-1/12,$

dla $x=-8$ $\quad 1=48\cdot C,\quad$ skąd $\quad C=1/48.$

Wobec tego[2]

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\cdot(x+2)\cdot(x+8)}=\int\limits_1^\infty \frac{1/16}{x}-\frac{1/12}{x+2}+\frac{1/48}{x+8}\,dx=$$

$$=\frac{1}{48}\cdot(3\cdot\ln|x|-4\cdot\ln|x+2|+\ln|x+8|)\Bigg|_{x=1}^{\infty}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{48}\cdot(3\cdot\ln|x|-4\cdot\ln|x+2|+\ln|x+8|)\right)\right)-\frac{1}{48}\cdot(2\cdot\ln 1-4\cdot\ln 3+\ln 9)=$$

$$=\frac{1}{48}\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^3\cdot(x+8)}{(x+2)^4}\right)-\frac{1}{48}\cdot(-4\cdot\ln 3+2\cdot\ln 3)=$$

$$=\frac{1}{48}\cdot\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{8}{x}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^4}\right)+\frac{2}{48}\cdot\ln 3=\frac{1}{48}\cdot\ln 1+\frac{1}{24}\cdot\ln 3=\frac{1}{24}\cdot\ln 3\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\frac{1}{24}\cdot\ln 3$.

Uwaga: Całki $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$, $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x+2}\,dx$, $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x+8}\,dx$ są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x\to\infty}\ln x,\qquad \lim_{x\to\infty}\ln(x+2),\qquad \lim_{x\to\infty}\ln(x+8)$$

[1] Można też wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B i C, porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

[2] Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty - \infty$.

Poprawne wykonanie przejścia granicznego jest kluczowym elementem rozwiązania. Bez tego elementu zadanie nie może być uzanane za rozwiązane nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, a rozwiązanie nie może być ocenione na więcej niż **4 punkty.**

Zadanie **5 (10 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-3)\cdot(5n+7)}\,.$$

Rozwiązanie:

Szukamy takich liczb A i B, że

$$\frac{1}{(5n-3)\cdot(5n+7)} = \frac{A}{5n-3} + \frac{B}{5n+7}\,.$$

Po wymnożeniu powyższej równości stronami przez $(5n-3)\cdot(5n+7)$ otrzymujemy

$$1 = A(5n+7) + B(5n-3)\,. \qquad (*)$$

Dla $n=3/5$ otrzymujemy $A=1/10$, natomiast przyjęcie $n=-7/5$ daje $B=-1/10$.
Inny sposób: porównując w równaniu (*) współczynniki przy n oraz wyrazy wolne dostajemy układ równań i go rozwiązujemy.

Zatem N-ta suma częściowa danego szeregu wyraża się wzorem

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(5n-3)\cdot(5n+7)} = \frac{1}{10}\cdot\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{5n-3} - \frac{1}{5n+7}\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{17}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{22}\right)+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{27}\right)+\left(\frac{1}{22}-\frac{1}{32}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{3N-13}-\frac{1}{5N-3}\right)+\left(\frac{1}{5N-8}-\frac{1}{5N+2}\right)+\left(\frac{1}{5N-3}-\frac{1}{5N+7}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{7}-\frac{1}{5N+2}-\frac{1}{5N+7}\right),$$

co przy N dążącym do $+\infty$ zbiega do

$$\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{10}\cdot\frac{9}{14} = \frac{9}{140}\,.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg ma sumę równą $9/140$.

Uwaga: Kluczowym elementem rozwiązania jest poprawne wykonanie przejścia granicznego, co można uzyskać tylko przez rozważanie sum częściowych. Bez tego elementu zadanie nie może być uzanane za rozwiązane nawet przy poprawnej odpowiedzi, a rozwiązanie nie może być ocenione na więcej niż **4 punkty.**

Zadanie **6 (10 punktów)**

Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_{-25}^{25} \frac{dx}{x^2+10x+125} \,.$$

Możesz otrzymać **6 punktów** za obliczenie całki oraz **4 punkty** za doprowadzenie wyniku do postaci niezawierającej "arctg".

Rozwiązanie:

Przekształcamy daną całkę i wykonujemy kolejno podstawienia $y=x+5$ oraz $t=y/10$:

$$\int_{-25}^{25} \frac{dx}{x^2+10x+125} = \int_{-25}^{25} \frac{dx}{(x+5)^2+100} = \int_{-20}^{30} \frac{dy}{y^2+100} = \int_{-2}^{3} \frac{dy}{100(y/10)^2+100} =$$

$$= \int_{-2}^{3} \frac{10\,dt}{100t^2+100} = \frac{1}{10}\cdot\int_{-2}^{3} \frac{dt}{t^2+1} = \left.\frac{\operatorname{arctg} t}{10}\right|_{t=-2}^{3} = \frac{\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg}(-2)}{10} = \frac{\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 2}{10} \,.$$

Upraszczamy $\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 2$ korzystając z liczb zespolonych:

$$\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 2 = \arg(1+3i) + \arg(1+2i) = \arg(-5+5i) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \,.$$

Z nierówności

$$0 < \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

wynika, że należy przyjąć $k=0$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $3\pi/40$.

Zadanie **7 (ZADANIE DODATKOWE)**

Dany jest taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \geqslant 40\,.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \geqslant 640\,.$$

Rozwiązanie:

Niech

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4\,.$$

Wówczas po zastosowaniu nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną do liczb $a_n/4$, $a_n/4$ oraz $a_n^4/256$ otrzymujemy kolejno

$$\sqrt[3]{\frac{a_n}{4}\cdot\frac{a_n}{4}\cdot\frac{a_n^4}{256}} \leqslant \frac{\frac{a_n}{2}+\frac{a_n^4}{256}}{3}\,,$$

$$\frac{a_n^2}{16} \leqslant \frac{128a_n + a_n^4}{3\cdot 256}\,,$$

$$a_n^2 \leqslant \frac{128a_n + a_n^4}{3\cdot 16}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{128a_n + a_n^4}{3\cdot 16}\,,$$

$$40 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant \frac{8}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{48}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_n^4\,,$$

$$40 \leqslant \frac{80}{3} + \frac{1}{48}\cdot S\,,$$

$$120 \leqslant 80 + \frac{1}{16}\cdot S\,,$$

$$40 \leqslant \frac{1}{16}\cdot S\,,$$

$$640 \leqslant S\,,$$

co należało dowieść.

Zadanie **8 (ZADANIE DODATKOWE)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \sqrt{x^4+9} + \sqrt[4]{1000x^2-900}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Daną w zadaniu całkę można przepisać jako
$$\sqrt{10}\cdot\int_1^3 \sqrt{\frac{x^4+9}{10}}+\sqrt[4]{10x^2-9}\,dx\,.$$
Niech $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem
$$f(x)=\sqrt{\frac{x^4+9}{10}}\,.$$
Zauważmy, że $f(1)=1$ oraz $f(3)=3$, a ponadto przekształcanie równania $y=f(x)$ prowadzi kolejno do
$$y=\sqrt{\frac{x^4+9}{10}}\,,\qquad y^2=\frac{x^4+9}{10}\,,\qquad 10y^2=x^4+9\,,$$
$$10y^2-9=x^4\,,\qquad \sqrt[4]{10y^2-9}=x\,.$$
Oznacza to, że dana w zadaniu całka ma postać
$$\sqrt{10}\cdot\int_1^3 f(x)+f^{-1}(x)\,dx\,,$$
gdzie $f^{-1}:[1,3]\to\mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f określoną wzorem
$$f^{-1}(x)=\sqrt[4]{10y^2-9}\,.$$

Całka
$$\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3 \sqrt{\frac{x^4+9}{10}}\,dx$$
jest polem figury[3]
$$F=\{(x,y):\ 1\leqslant x\leqslant 3\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}=\left\{(x,y):\ 1\leqslant x\leqslant 3\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{\frac{x^4+9}{10}}\right\}.$$

Z kolei pole figury
$$G=\Big\{(x,y):\ 1\leqslant y\leqslant 3\ \wedge\ 0\leqslant x\leqslant f^{-1}(y)\Big\}=\Big\{(x,y):\ 1\leqslant y\leqslant 3\ \wedge\ 0\leqslant x\leqslant \sqrt[4]{10y^2-9}\Big\}\,,$$
jest równe
$$\int_1^3 f^{-1}(y)\,dy=\int_1^3 \sqrt[4]{10y^2-9}\,dy=\int_1^3 \sqrt[4]{10x^2-9}\,dx\,.$$

Zatem całka
$$\int_1^3 \sqrt{\frac{x^4+9}{10}}+\sqrt[4]{10x^2-9}\,dx$$
ma wartość równą polu figury $F\cup G$, które to pole jest równe 8 (kwadrat 3×3 z usuniętym kwadratem 1×1).

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $8\cdot\sqrt{10}$.

[3] Naszkicuj opisywane figury!