Konwersatorium w ŚRODĘ 26 stycznia 2024 będzie

miało charakter konsultacji[1] (nie jest przewidziana specjalna lista zadań).
W tym czasie osoby zaproszone piszą kolokwium dodatkowe w sali HS,
a pozostałe idą na zajęcia do sali WS lub EM (w/g własnego wyboru).

Zadania do omówienia[2] na wykładzie we wtorek 23.01.$\binom{4!}{3}$ i środę 24.01.$\binom{4!}{3}$.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed wykładem !!!

14. Szeregi liczbowe.

683. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 9\,.$$

684. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 8\,.$$

685. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = 1\,.$$

686. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^2 = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\,.$$

Dla podanego przykładu wyznaczyć wartości sum szeregów występujących w powyższym równaniu i sprawdzić, że jest ono spełnione.

[1] Proszę przed zajęciami zastanowić się, o co chcecie zapytać osobę prowadzącą.

[2] Na wykładzie będą omówione tylko wybrane zadania. W przypadku pozostałych zadań należy, w razie potrzeby, zapoznać się z rozwiązaniami lub poprosić o ich omówienie na konwersatorium w ŚRODĘ 26 stycznia $\binom{4!}{3}$.

687. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = 6\,.$$

688. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})^2 = \frac{4}{3}\,.$$

689. Wyznaczyć wszystkie zbieżne szeregi **geometryczne** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich** spełniające warunek

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 15 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4\,.$$

690. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach **dodatnich**, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 20, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = 5\,.$$

691. Dany jest zbieżny szereg geometryczny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o sumie S. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = T\,.$$

Wyznaczyć sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ w zależności od S i T.

692. Podać przykład takiego szeregu **zbieżnego** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ wyraz a_n jest dodatni, a ponadto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 13\,.$$

693. Skonstruować przykład takiego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych, że szeregi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^4$ są zbieżne, a ponadto zachodzą równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4\,.$$

694. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-9} .$$

695. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n} .$$

696. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2+3n-2} .$$

697. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4} .$$

698. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+2)\cdot(n+3)} .$$

699. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n} .$$

700. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^3-4n} .$$

701. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+4)} .$$

702. Obliczyć sumę szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\sqrt{n+1}+(n+1)\cdot\sqrt{n}} .$$

Niech
$$a_n=\frac{120}{n(n+1)(n+2)} \qquad \text{dla} \qquad n\in\mathbb{N}\,.$$
Wiadomo, że wówczas szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 30.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

703. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n+a_{n+1}) =$ ....

704. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n-a_{n+1}) =$ ....

705. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_1\cdot a_n) =$ ....

706. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_2\cdot a_n) =$ ....

707. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2-a_{n+1}^2\right) =$ ....

708. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2-a_{n+2}^2\right) =$ ....

709. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2-a_{n+3}^2\right) =$ ....

710. $\sum\limits_{\mathbf{n=2}}^{\infty} \left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right) =$ ....

711. $\sum\limits_{\mathbf{n=3}}^{\infty} \left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right) =$ ....

712. $\sum\limits_{\mathbf{n=4}}^{\infty} \left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right) =$ ....

Niech

$$a_n=\frac{60}{n(n+1)} \qquad \text{dla} \qquad n\in\mathbb{N}\,.$$

Wiadomo, że wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 60.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

713. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+a_{n+1})=$ ....

714. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-a_{n+1})=$ ....

715. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_1\cdot a_n)=$ ....

716. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_2\cdot a_n)=$ ....

717. $\sum_{\mathbf{n=3}}^{\infty} a_n=$ ....

718. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^3-a_{n+1}^3\right)=$ ....

719. $\sum_{n=1}^{\infty} \Big((a_n-a_{n+1})\cdot(a_n+a_{n+1})\Big)=$ ....

720. $\sum_{\mathbf{n=3}}^{\infty} \left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ....

721. $\sum_{\mathbf{n=4}}^{\infty} \left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ....

722. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{a_n^2+1600}-\sqrt{a_{n+1}^2+1600}\,\right)=$ ....

W każdym z poniższych 5 zadań podaj w postaci uproszczonej sumę szeregu.

723. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)=$ ....

724. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+2]{n+2}\right)=$ ....

725. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+3]{n+3}\right)=$ ....

726. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+1]{n+1}\right)=$ ....

727. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-\sqrt[n+2]{n+2}\right)=$ ....

Niech $a_n=\frac{120}{n(n+2)}$ dla $n\in\mathbb{N}$. Wiadomo, że wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, a jego suma jest równa 90.

W każdym z poniższych 10 zadań podaj sumę szeregu.

728. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=$ ....

729. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=$ ....

730. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+1}^2\right)=$ ....

731. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+2}^2\right)=$ ....

732. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+3}^2\right)=$ ....

733. $\sum_{\mathbf{n=4}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ....

734. $\sum_{\mathbf{n=6}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ......

735. $\sum_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right)=$ ......

736. $\sum_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(3^{a_n}-3^{a_{n+1}}\right)=$ ......

737. $\sum_{\mathbf{n=10}}^{\infty}\left(4^{a_n}-4^{a_{n+1}}\right)=$ ......