Ciągi i szeregi funkcyjne.

Dziś zajmiemy się bardziej ogólnymi[240] ciągami i szeregami funkcyjnymi, to znaczy takimi ciągami i szeregami, których wyrazy są funkcjami. Przypominam, że ciąg i szereg to naprawdę taki sam obiekt, tylko nieco inaczej podany. W ciągu podajemy[241] wyrazy, a w szeregu chodzi nam o ciąg coraz dłuższych sum częściowych — wówczas wyrazami nazywamy składniki występujące w tych sumach.

Przykład szeregów potęgowych trochę nas rozpieścił: Po pierwsze obszar zbieżności szeregu potęgowego jest bardzo porządnym zbiorem[242], a po drugie suma szeregu potęgowego jest bardzo porządną[243] funkcją i w dodatku szereg taki można dowolnie wiele razy różniczkować wyraz za wyrazem. Okazuje się jednak, że przy zupełnie dowolnych ciągach i szeregach funkcyjnych tak dobrze już nie jest.

Dla ustalenia uwagi zajmijmy się ciągami funkcyjnymi. To obejmie też szeregi funkcyjne, tyle tylko, że należy rozumieć szereg jako ciąg sum częściowych.

Ciągiem funkcyjnym nazwiemy ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie funkcje f_n są określone[244] na wspólnej dziedzinie. Powiemy, że ciąg (f_n) jest zbieżny punktowo[245] do funkcji[246] f (określonej na tej samej dziedzinie, co funkcje f_n), jeżeli dla każdej liczby x należacej do wspólnej dziedziny rozważanych funkcji zachodzi zbieżność

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,.$$

Zapiszemy to symbolicznie[247]:

$$f_n \to f\,.$$

Do tego dopowiemy wyraźnie "przy $n\to\infty$" lub zostawimy to w domyśle, jeśli uznamy, że jest to jasne z kontekstu.

Zbieżność punktowa jest więc dokładnie tym, co stosowaliśmy w przypadku szeregów potęgowych. Po prostu dla każdego punktu wspólnej dziedziny z osobna rozważamy zbieżność ciągu liczbowego[248] o wyrazach będących wartościami poszczególnych funkcji f_n w tym właśnie punkcie.

[240] Dotąd poznaliśmy jedynie szeregi potęgowe — jest to bardzo szczególny rodzaj szeregów funkcyjnych.

[241] Najczęściej gotowym w miarę prostym wzorem.

[242] Przedziałem.

[243] Nieskończenie wiele razy różniczkowalną.

[244] Lub rozważane na wspólnej dziedzinie. Nawet jeśli wzory, którymi określone są funkcje, mają sens na większym zbiorze, to z kontekstu powinno być jasne, do jakiego zbioru je ograniczamy.

[245] Póki co możemy przysłówek "punktowo" lub przymiotnik "punktowa" w sformułowaniu "zbieżność punktowa" taktować jak niewiele znaczący ozdobnik, ale niedługo te słówka staną się bardzo istotne.

[246] Oznaczenia tu przyjęte podyktowane są względami dydaktycznymi — oznaczenie granicy punktowej ciągu (f_n) przez f, gdzie to wszystko są **f**unkcje, pozwala się łatwo rozeznać, co jest czym i do czego pasuje. Należy sobie jednak zdawać sprawę, że gdyby ktoś wziął sobie za bardzo do serca obowiązujące konwencje, to powinien uznać, że literka f oznacza ciąg (f_n), jako że f_n oznacza n-ty wyraz ciągu f.

[247] Zauważ, że w tym zapisie używamy nazw funkcji, a nie ich wartości w punkcie x.

[248] Lub szeregu liczbowego.

Popatrzmy teraz na dwa przykłady, które pokażą, że z ogólnymi ciągami i szeregami funkcyjnymi może nie być tak fajnie jak z szeregami potęgowymi.

Przykład 98:

Rozważmy ciąg funkcyjny (f_n), w którym funkcje $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są określone wzorem:

$$f_n(x)=\frac{1}{1+n^2x^2}\,.$$

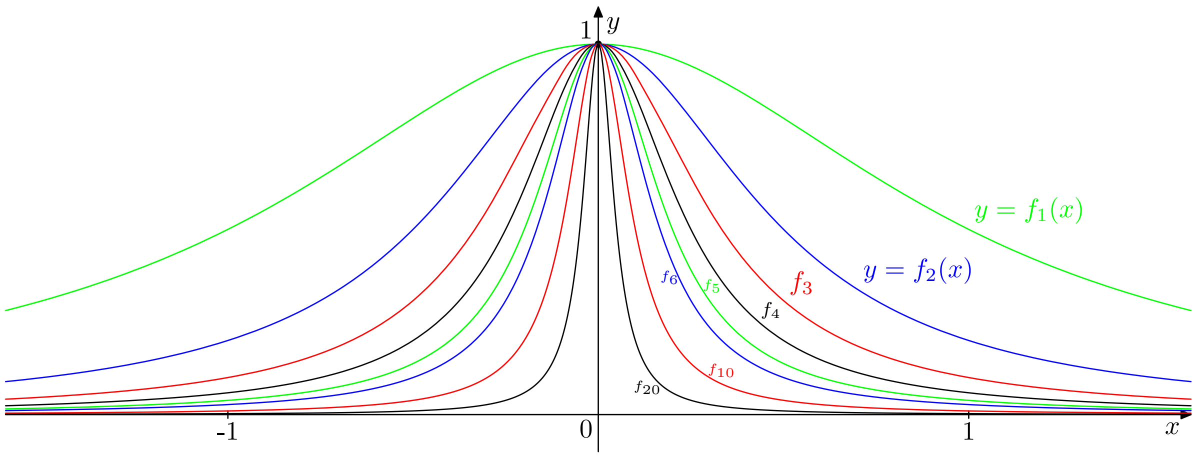
Jeśli komuś to pomoże, to można też przyjąć, że

$$f_1(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

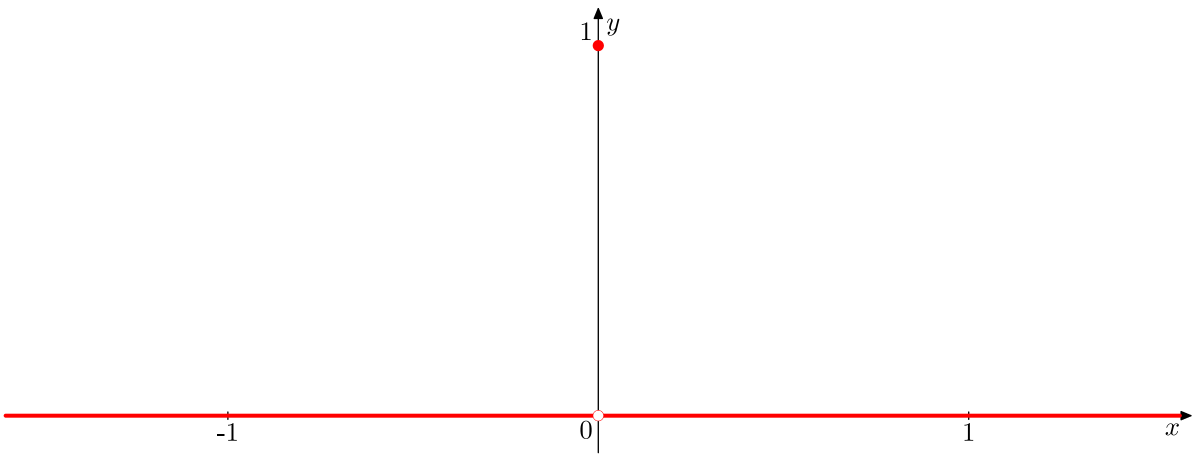
oraz

$$f_n(x)=f_1(nx)\,.$$

Wtedy będzie widać, że wystarczy wyobrazić sobie wykres funkcji f_1, a wówczas wykres funkcji f_n jest wykresem funkcji f_1 zwężonym n-krotnie w poziomie (rys. 56).



rys. 56



rys. 57

Granicę punktową ciągu (f_n) można odczytać z rysunku 56 i zobaczyć, że jej wykres jest przedstawiony na rysunku 57.

Można ją też wyliczyć "na ślepo" bez wyobrażania sobie wykresów poszczególnych funkcji:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Zatem funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będąca granicą punktową ciągu (f_n) określona jest wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Przy tych oznaczeniach możemy zapisać $f_n \to f$.

Co wynika z powyższego przykładu? Mamy oto zbieżny[249] ciąg funkcyjny. Wyrazy tego ciągu są bardzo porządnymi funkcjami: nieskończenie wiele razy różniczkowalnymi na całej prostej[250]. A graniczna funkcja nie jest nawet ciągła. Co prawda tylko w jednym punkcie, ale jest to wynikiem kompromisu między prostotą przykładu, a pokazaniem spektakularnego zjawiska — spokojnie mógłbym uzyskać więcej nieciągłości funkcji granicznej za cenę komplikacji przykładu.

Przykład 99:
Rozważmy szereg[251] funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\cdot 3^n\cdot x)}{n}.$$

Wyrazy tego szeregu są również bardzo porządne[252], a ponadto są one funkcjami okresowymi o okresie[253] 2π. Skoro tak, to wystarczy przyjrzeć się zachowaniu tego szeregu na przedziale długości 2π, powiedzmy $[0, 2\pi]$. Interesować nas będzie obszar zbieżności tego szeregu, czyli rozstrzygnięcie[254], w których punktach szereg jest zbieżny, a w których rozbieżny.

Przyjrzyjmy się danemu szeregowi w pewnych szczególnych punktach, dobranych tak, aby łatwo było rozstrzygnąć jego zbieżność.

Dla $x=0$ otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

czyli szereg harmoniczny, a więc rozbieżny. Podobnie jest dla[255] $x=2\pi$.

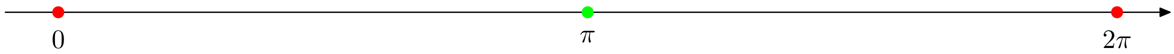
[249] Zbieżny punktowo, ale na razie nie wiemy, aby mógł być zbieżny inaczej.
[250] A nawet analitycznymi na całej prostej, jeśli ktoś pamięta, co to funkcje analityczne.
[251] Akurat tym razem wygodniej jest mi rozważać szereg, a nie ciąg.
[252] Nieskończenie wiele razy różniczkowalne na całej prostej, a nawet analityczne.
[253] Tak naprawdę to wszystkie wyrazy tego szeregu mają też okres $2\pi/3$, ale nie będę robił z tego użytku.
[254] Tak po prawdzie to tego do końca nie rozstrzygniemy, ale zdobędziemy wystarczającą motywację, aby tak postawiony ambitny cel porzucić.
[255] Oraz dla $x=2k\pi$, ale ze względu na okresowość wyrazów szeregu interesują nas tylko punkty z przedziału $[0, 2\pi]$.

Dla $x=\pi$ otrzymujemy[256] szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n\cdot 3^n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,,$$

czyli szereg anharmoniczny, a więc zbieżny.

Nanieśmy te informacje na oś liczbową zaznaczając na czerwono punkty, w których szereg jest rozbieżny, a na zielono punkty, w których jest zbieżny (rys. 58).



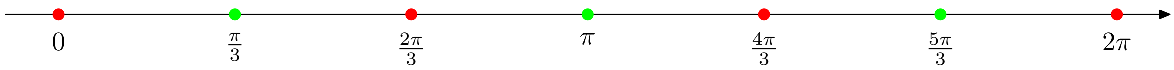
rys. 58

Dla $x=\frac{k\pi}{3}$, gdzie $k=1,2,4,5$, otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{kn\cdot 3^n\cdot\pi}{3}\right)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kn\cdot 3^{n-1}\cdot\pi\right)}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{kn\cdot 3^{n-1}}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{kn}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^k\right)^n}{n}\,,$$

czyli zbieżny szereg anharmoniczny dla k nieparzystych oraz rozbieżny szereg harmoniczny dla k parzystych.

Nanosimy te informacje na oś liczbową (rys. 59).



rys. 59

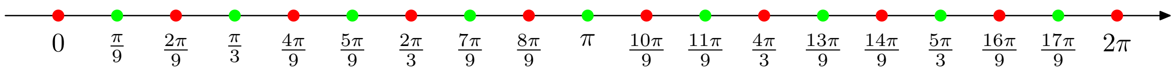
Teraz rozważamy $x=\frac{k\pi}{9}$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią mniejszą od 18, niepodzielną przez 3. Otrzymujemy szereg[257]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{kn\cdot 3^n\cdot\pi}{9}\right)}{n}=\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{3}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\left(kn\cdot 3^{n-2}\cdot\pi\right)}{n}=\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{3}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{kn\cdot 3^{n-2}}}{n}=$$

$$=\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{3}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{kn}}{n}=\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{3}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left((-1)^k\right)^n}{n}\,,$$

czyli zbieżny szereg anharmoniczny[258] dla k nieparzystych oraz rozbieżny szereg harmoniczny dla k parzystych.

Nanosimy te informacje na oś liczbową (rys. 60).



rys. 60

[256]Pamiętając, że $\cos k\pi=(-1)^k$, a wartość $(-1)^k$ zależy tylko od parzystości liczby k. W szczególności

$$(-1)^{n\cdot 3^n}=(-1)^n\,,$$

bo liczby $n\cdot 3^n$ oraz n są tej samej parzystości.

[257]W trakcie rachunków wyłączamy przed szereg pierwszy składnik (odpowiadający $n=1$) — nie wpływa on na zbieżność szeregu.

[258]Naprawdę jest to szereg anharmoniczny bez pierwszego wyrazu. Podobnie szereg harmoniczny chwilę dalej zaczyna się od drugiego wyrazu.

Teraz rozważamy $x=\frac{k\pi}{27}$, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią mniejszą od 54, niepodzielną przez 3. Otrzymujemy szereg[259]

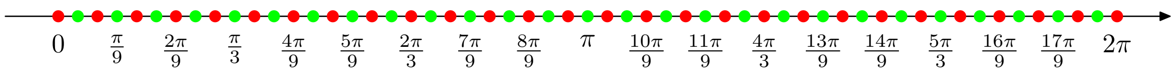
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{kn\cdot 3^n\cdot\pi}{27}\right)}{n}=\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{9}\right)+\frac{\cos\left(\frac{2k\cdot\pi}{3}\right)}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\cos\left(kn\cdot 3^{n-3}\cdot\pi\right)}{n}=$$

$$=\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{9}\right)+\frac{\cos\left(\frac{2k\cdot\pi}{3}\right)}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{kn\cdot 3^{n-3}}}{n}=\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{9}\right)+\frac{\cos\left(\frac{2k\cdot\pi}{3}\right)}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{kn}}{n}=$$

$$=\cos\left(\frac{k\cdot\pi}{9}\right)+\frac{\cos\left(\frac{2k\cdot\pi}{3}\right)}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\left((-1)^k\right)^n}{n},$$

czyli zbieżny szereg anharmoniczny[260] dla k nieparzystych oraz rozbieżny szereg harmoniczny[261] dla k parzystych.

Informacje te znajdziemy na rysunku 61.



rys. 61

W analogiczny sposób[262] można udowodnić, że dla $x=\frac{k\pi}{3^m}$ dany szereg jest zbieżny w przypadku k nieparzystego i rozbieżny w przypadku k parzystego.

Widzimy więc, że **szereg jest zbieżny w punktach, które leżą gęsto na prostej, a rozbieżny w innych punktach, które też leżą gęsto na prostej.**

Obszar[263] zbieżności rozważanego szeregu funkcyjnego jest więc jakąś totalną sieczką. Nie będziemy nawet zastanawiać się nad jego zbieżnością w innych punktach niż wymienione powyżej.

Podsumujmy:

W przypadku ciągu funkcyjnego przejście graniczne nie zachowuje ciągłości. Granica[264] ciągu funkcji ciągłych[265] nie musi być ciągła. A obszar zbieżności ciągu lub szeregu funkcyjnego może być bardzo kapryśnym zbiorem.

[259]Tym razem wyłączamy przed szereg dwa składniki (odpowiadające $n=1$ oraz $n=2$).
[260]Bez dwóch początkowych wyrazów.
[261]Też bez dwóch wyrazów.
[262]To jest tylko i wyłącznie kwestia odpowiedniego zredagowania dowodu. W podanych punktach otrzymujemy prawie szereg anharmniczny lub harmoniczny. "Prawie", bo nie zgadza się skończenie wiele początkowych wyrazów, co jednak nie wpływa na zbieżność.
[263]W zasadzie jest tu pewne nadużycie, gdyż słowo "obszar" kojarzy się zwykle z w miarę porządnymi zbiorami.
[264]Punktowa.
[265]A nawet różniczkowalnych.

Postaram się teraz, na ile to możliwe, wyjaśnić skąd biorą się powyższe problemy i jaka jest recepta na ich rozwiązanie.

Otóż mając ciąg funkcyjny, czyli taki, którego wyrazy sa funkcjami, zdefiniowaliśmy przejście graniczne[266] bez uwzględniania w procesie tego przejścia granicznego, że obiekty, którymi operujemy, są funkcjami. Przechodziliśmy do granicy osobno dla każdego punktu wspólnej dziedziny rozważanych funkcji, a następnie z tak uzyskanych granic ciągów liczbowych skmponowaliśmy funkcję graniczną. Odpowiednie przejście graniczne powinno jednak uwzględniać naturę wyrazów ciągu[267], bo tylko wtedy mamy szansę na zachowanie podstawowych własności[268] tych obiektów.

Wróćmy więc do definicji granicy ciągu liczbowego, która to definicja sprawdza się znakomicie. Ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny do granicy g, jeżeli

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ |a_n - g| < \varepsilon\,.$$

Intuicyjna opowiastka jest taka, że dalekie wyraz ciągu mają być bliskie granicy. Za cały mechanizm uzależnienia dalekiego posunięcia się w ciągu stosownie do małości epsilona odpowiada układ kwantyfikatorów, który jest tu dość uniwersalny[269]. Całości dopełnia możliwość określania bliskości dwóch liczb rzeczywistych[270] dzięki pomiarowi zwykłej geometrycznej odległości między liczbami na osi liczbowej. Odległością liczb x i y jest po prostu moduł ich różnicy: $|x-y|$. Skoro mamy miarę tego, jak bardzo dwie liczby się różnią, to możemy tę miarę wkomponować w definicję granicy ciągu liczbowego.

Przez analogię mglibyśmy przyjąć, że ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny[271] do funkcji granicznej f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ (\text{miara tego, jak bardzo } f_n \text{ różni się od } f) < \varepsilon\,.$$

Trzeba więc umówić się jakoś sensownie co do sposobu mierzenia[272] jak bardzo dwie funkcje się różnią.

Do pewnego stopnia jest tu dowolność umowy[273], jeśli jednak mamy osiągnąć odpowiedni cel, to jedna umowa jest lepsza od innych.

Okazuje się[274], że w kontekście funkcji ciągłych najodpowiedniejszą miarą tego, jak bardzo różnią się dwie funkcje, jest spojrzenie na największą[275] możliwą ich różnicę w tym

[266] Czyli zbieżność punktową.
[267] Czyli w tym wypadku funkcji.
[268] W tym momencie interesuje nas ciągłość.
[269] Więc nie będziemy przy nim majstrować.
[270] W tym wypadku a_n oraz g.
[271] Można się spodziewać, że to już będzie inny rodzaj zbieżności niż znana nam zbieżność punktowa.
[272] Mierzenia liczbą rzeczywistą nieujemną.
[273] To trochę tak, jakby zapytać, czy w lipcu któregoś tam roku było gorąco. Ktoś powie: Było gorąco, przecież 13-go było ponad 40 stopni. A ktoś inny powie: Ależ skąd, w pozostałe dni było zimno jak diabli, średnia temperatura ledwie przekroczyła 10 stopni. Kto ma rację? Każdy swoją. A to czy przywiążemy większą wagę do maksimum temperatury czy do średniej, zależy od tego, do czego nam to jest potrzebne.
[274] Tego nie jestem w stanie tu wyjaśnić — trzeba liznąć trochę analizy funkcjonalnej, aby to do głębi zrozumieć.
[275] Słówko "największą" jest w tym rozbudowanym zdaniu najzgrabniejsze językowo, ale w istocie chodzi mi o kres górny, a nie maksimum.

samym punkcie.

Przyjmiemy więc, że miarą[276] tego, jak bardzo różnią się funkcje f i g określone na wspólnej dziedzinie D, jest liczba

$$\sup_{x\in D} |f(x)-g(x)| = \sup \{|f(x)-g(x)| : x\in D\} .$$

Opakujmy to teraz w oznaczenia, jakie są w matematyce powszechnie używane. Normą supremum[277] funkcji f określonej na zbiorze D nazywamy liczbę[278]

$$\|f\| = \sup_{x\in D} |f(x)| .$$

Liczba ta mierzy jak duża jest funkcja f, przy czym miarą wielkości funkcji f jest kres górny zbioru modułów jej wartości. Norma supremum dla funkcji jest odpowiednikiem wartości bezwzględnej dla liczby rzeczywistej.

Miarą tego, jak bardzo różnią się dwie funkcje, jest norma[279] ich różnicy[280], w przypadku funkcji f i g będzie to $\|f-g\|$.

Wobec tego definicję zbieżności ciągu funkcyjnego (f_n) do funkcji f, którą to definicję naszkicowaliśmy jako

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall} \text{(miara tego, jak bardzo } f_n \text{ różni się od } f) < \varepsilon ,$$

można teraz doprecyzować następująco

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall} \|f_n - f\| < \varepsilon .$$

Widać tu niezwykłe podobieństwo[281] powyższej definicji do definicji zbieżności ciągu. Poza użytymi innymi literkami jedyna różnica jest taka, że zamiast modułu (jedna kreska) mamy normę (dwie kreski).

Zdefiniowany powyżej rodzaj zbieżności nazywamy zbieżnością jednostajną i zapisujemy jako $f_n \rightrightarrows f$ (w domyśle: przy $n\to\infty$).

Wyjaśnienia wymaga słówko "jednostajna", które już się pojawiło w pierwszym semestrze przy okazji ciągłości[282] funkcji.

Warunek

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall} \|f_n - f\| < \varepsilon$$

jest równoważny warunkowi

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall} \|f_n - f\| \leqslant \varepsilon .$$

---

[276] W teorii przestrzeni metrycznych, która obejmuje tę sytuację, nazywa się to odległością między punktami przestrzeni metrycznej — w tym wypadku punktami odpowiedniej przestrzeni metrycznej są rozważane przez nas funkcje.

[277] Są na świecie normy różne. Ale nas interesuje ta jedna. Słowo "supremum" wyjaśnia, o którą normę chodzi.

[278] Należy zwrócić uwagę na to oznaczenie. Po pierwsze, pod znakiem normy jest funkcja f, a nie wartość $f(x)$. Po drugie, w domyśle lub w kontekście pozostaje zbiór D, na którym obliczamy normę. Po trzecie, pełny zapis wyglądałby tak: $\|f\|_\infty$ — indeks ∞ mówi, że chodzi o normę supremum.

[279] Pozwolę sobie opuszczać słówko "supremum", gdyż innych norm na stole nie mamy.

[280] Podobnie: miarą tego, jak bardzo różnią się dwie liczby, jest moduł ich różnicy.

[281] Chodzi o graficzne podobieństwo napisu.

[282] Przypomnę, że ciągłość jednostajna to silniejszy warunek ciągłości, o czym trochę za chwilę.

Co prawda w każdym z tych warunków dobór N do epsilona jest inny, ale wobec dowolności epsilona, koniec końców nie ma to znaczenia — po prostu przyjęło się pisać nierówność ostrą. Z kolei nierówność

$$\|f_n - f\| \leqslant \varepsilon\,,$$

czyli[283]

$$\sup\left\{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\right\} \leqslant \varepsilon\,,$$

jest równoważna warunkowi

$$\underset{x\in D}{\forall} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Zatem jednostajną zbieżność $f_n \rightrightarrows f$ można zdefiniować warunkiem

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ \underset{x\in D}{\forall} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\,,$$

co wobec dowolności epsilona jest równoważne warunkowi

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ \underset{x\in D}{\forall} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Ponieważ można zmieniać kolejność kwantyfikatorów tego samego rodzaju stojących obok siebie, ostatni warunek możemy przepisać jako

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{x\in D}{\forall}\ \underset{n\geqslant N}{\forall} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,. \tag{$\rightrightarrows$}$$

Wróćmy teraz do warunku zbieżności punktowej $f_n \to f$. Możemy go zapisać jako

$$\underset{x\in D}{\forall} f_n(x) \to f(x)\,,$$

co po uwzględnieniu definicji granicy ciągu liczbowego przybiera postać

$$\underset{x\in D}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Po zmianie kolejności pierwszych dwóch kwantyfikatorów otrzymujemy:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{x\in D}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,. \tag{$\to$}$$

Jaka jest różnica między warunkiem zbieżności punktowej $(\to)$ i warunkiem zbieżności jednostajnej $(\rightrightarrows)$? Tylko taka, że w pierwszym warunku mamy układ kwantyfiktorów $\underset{x\in D}{\forall}\ \underset{N}{\exists}$, a w drugim zamiast tego jest $\underset{N}{\exists}\ \underset{x\in D}{\forall}$. Od tego układu kwantyfikatorów zależy, czy dobór N do ε jest niezależny od x, czy też ma prawo od x zależeć. Słowo "jednostajna" oznacza, że dobór N do ε jest **niezależny** od x.

Podobnie jest z ciągłością funkcji:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{x_0\in D_f}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\substack{x\in D_f\\ |x-x_0|<\delta}}{\forall} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,,$$

gdzie dobór delty do epsilona ma prawo zależeć od x_0, ale przy ciągłości jednostajnej[284] ten dobór jest od x_0 niezależny[285]:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{x_0\in D_f}{\forall}\ \underset{\substack{x\in D_f\\ |x-x_0|<\delta}}{\forall} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,.$$

[283] Cały czas przyjmujemy, że D jest wspólną dziedziną funkcji f_n oraz f.
[284] A więc mocniejszej.
[285] Ta niezależność jest zaznaczona odpowiednią kolejnością kwantyfikatorów.

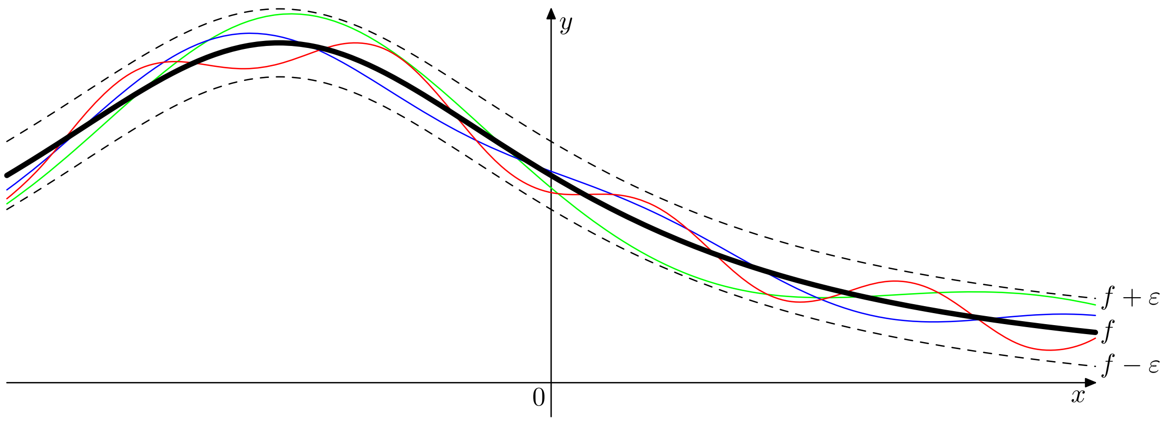
Podobnie jak ciągłość jednostajna funkcji jest warunkiem mocniejszym niż ciągłość, tak zbieżność jednostajna ciągu lub szeregu funkcyjnego jest warunkiem mocniejszym niż zbieżność punktowa.

Ostrzeżenie!!!

Z doświadczenia wiem, że niektórzy studenci mylą jednostajną ciągłość z jednostajną zbieżnością. To są różne pojęcia i dotyczą innych obiektów matematycznych. Jednostajna ciągłość jest własnością pojedynczej funkcji i jest wzmocnieniem warunku ciągłości. Natomiast jednostajna zbieżność jest własnością ciągu (lub szeregu) funkcyjnego i jest wzmocnieniem warunku zbieżności punktowej.

Słowo "jednostajna" oznacza tyle, że dobór δ lub N do epsilona odbywa się jednakowo[286] na całej dziedzinie[287].

Jak sobie wyobrazić, czym jest zbieżność jednostajna ciągu funkcyjnego? Popatrz na rysunek 62.



rys. 62

Jeśli narysujemy sobie wykres granicznej funkcji f oraz jego przesunięcia w górę i w dół o ε, to prawie wszystkie[288] wyrazy ciągu funkcyjnego mają wykresy całkowicie mieszczące się w zakrzywionym pasie ograniczonym przez te przesunięcia. Jest to bowiem geometryczna interpretacja nierowności

$$f(x)-\varepsilon<f_n(x)<f(x)+\varepsilon\,,$$

które przy odpowiednio dużych[289] n muszą[290] zachodzić dla każdego $x\in D$.

[286] Czyli jednostajnie.
[287] Chodzi o dziedzinę pojedynczej funkcji, gdy mówimy o ciągłości, albo wspólną dziedzinę funkcji będących wyrazami ciągu/szeregu funkcyjnego, gdy mówimy o zbieżności.
[288] Czyli wszystkie poza skończoną ilością.
[289] Odpowiednio dużych to znaczy większych od N dobranego do ε.
[290] Zgodnie z definicją jednostajnej zbieżności $f_n \rightrightarrows f$.

Przepisując warunek jednostajnej zbieżności $f_n \rightrightarrows f$ z postaci

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ \|f_n-f\|<\varepsilon$$

do dziwacznie wyglądającej postaci

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ \Big|\|f_n-f\|-0\Big|<\varepsilon$$

dostrzegamy w tym ostatnim definicję zbieżności ciągu liczbowego $(\|f_n-f\|)_{n\in\mathbb{N}}$ do zera. Możemy więc powiedzieć, że $f_n \rightrightarrows f$ jest równoważne warunkowi

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0\,.$$

Taka postać warunku jednostajnej zbieżności może się przydać, bo gdy uda nam się wyliczyć[291] $\|f_n-f\|$, mamy szansę na rozstrzygnięcie jednostajnej zbieżności tak skomplikowanego obiektu jak ciąg funkcyjny, badając tak prosty obiekt jak ciąg liczbowy.

A teraz kilka uwag uzupełniających (zakładamy, że wszystkie występujące funkcje są określone na tej samej dziedzinie).

- Norma spełnia nierówność trójkąta, to znaczy $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$.
- Jeśli $f_n \rightrightarrows f$ oraz $g_n \rightrightarrows g$, to $(f_n+g_n)\rightrightarrows(f+g)$ i analogicznie $(f_n-g_n)\rightrightarrows(f-g)$.
- Jeśli $f_n \rightrightarrows f$, to dla każdej liczby rzeczywistej c zachodzi $(c\cdot f_n)\rightrightarrows(c\cdot f)$.

A dlaczego w ogóle zajmujemy się zbieżnością jednostajną? To sobie zaraz wyjaśnimy. Okazuje się bowiem, że granica jednostajnie zbieżnego ciągu[292] funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Zbieżność jednostajna świetnie pasuje do świata funkcji ciągłych, bo ciągłość zachowuje się przy jednostajnych przejściach granicznych. Ale będziemy mieć coś więcej, bo poznamy warunki, które zagwarantują także różniczkowalność granicznej funkcji.

Podsumowanie wstępnych informacji o zbieżności jednostajnej.

Norma supremum funkcji ograniczonej[293] $f:D\to\mathbb{R}$

$$\|f\|=\sup_{x\in D}|f(x)|\,.$$

Nierówność trójkąta dla normy supremum: Dla funkcji ograniczonych $f,g:D\to\mathbb{R}$ zachodzi

$$\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|\,.$$

Zbieżność punktowa ciągu funkcyjnego: Ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny punktowo do funkcji f, co zapisujemy jako $f_n\to f$, jeżeli dla każdego x należącego do wspólnej dziedziny funkcji f_n oraz f zachodzi

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\,.$$

[291] Lub choćby oszacować.
[292] Ewentualnie suma jednostajnie zbieżnego szeregu.
[293] Funkcja f musi być ograniczona, aby norma supremum była liczbą skończoną. Na upartego można byłoby się umówić, że norma supremum funkcji nieograniczonej jest nieskończonością, ale raczej tego nie robimy.

Zbieżność jednostajna ciągu funkcyjnego: Ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji f, co zapisujemy jako $f_n \rightrightarrows f$, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0\,.$$

Konieczne założenie: Funkcje f_n oraz f są określone na wspólnej dziedzinie.
Wskazane założenie: Funkcje f_n oraz f są ograniczone[294].

A teraz ważne twierdzenie ...

Twierdzenie: Jeżeli ciąg ograniczonych funkcji ciągłych (f_n) określonych na wspólnej dziedzinie jest zbieżny jednostajnie do funkcji[295] f, to funkcja f jest ciągła.

Główny element dowodu:

Nie jest celem tego wykładu wchodzenie w teorię na tyle głęboko, aby dowodzić wszystkich prezentowanych twierdzeń, ale warto przedstawić pewne charakterystyczne elementy niektórych dowodów.

Tak naprawdę, udowodnimy, że jeżeli $f_n \rightrightarrows f$ oraz wszystkie funkcje f_n są ciągłe w punkcie x_0 należącym do ich wspólnej dziedziny D, to także funkcja graniczna f jest ciągła w x_0.

Zapiszmy przy pomocy kwantyfikatorów warunki[296], które zostały użyte w powyższym zdaniu:

Założenie: $f_n \rightrightarrows f$:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geqslant N}{\forall}\ \underset{x_1\in D}{\forall} |f_n(x_1) - f(x_1)| < \varepsilon\,. \tag{$Z1$}$$

Założenie: f_n są ciągłe w x_0:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\substack{x_2\in D\\ |x_2-x_0|<\delta}}{\forall} |f_n(x_2) - f_n(x_0)| < \varepsilon\,. \tag{$Z2$}$$

Teza: f jest ciągła w x_0:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{\substack{x\in D\\ |x-x_0|<\delta}}{\forall} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,. \tag{T}$$

Teraz główny element dowodu wygląda następująco: Dowodzimy warunku (T), przy czym możemy korzystać z warunków $(Z1)$ i $(Z2)$.

Warunek (T) mówi: Dla każdego ε istnieje taka δ, że coś tam. Czyli do epsilona musimy wskazać procedurę doboru odpowiedniej delty, a możemy przy tym korzystać z założeń $(Z1)$ i $(Z2)$.

Niech więc ε będzie dowolną liczbą dodatnią. Dobieramy do $\varepsilon/3$ liczbę N w warunku $(Z1)$. To oznacza, że

$$\underset{n\geqslant N}{\forall}\ \underset{x_1\in D}{\forall} |f_n(x_1) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

---

[294] Jak ktoś chce się silić na osłabianie naturalnych założeń, to może tylko założyć, że różnice $f_n - f$ są funkcjami ograniczonymi.

[295] Określonej na tej samej dziedzinie, co funkcje f_n.

[296] Zamiast x_1 w warunku $(Z1)$ oraz x_2 w warunku $(Z2)$ naturalnie byłoby napisać x. Dodajemy jednak do x-ów indeksy, aby nie mieszały nam się x-y występujące w różnych warunkach.

Ustalamy jakąkolwiek liczbę $n \geqslant N$. Wówczas dla tej liczby n zachodzi warunek:

$$\underset{x_1 \in D}{\forall} |f_n(x_1) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

Dobieramy z warunku $(Z2)$ deltę do $\varepsilon/3$ przy n ustalonym powyżej. Otrzymujemy wówczas

$$\underset{\substack{x_2 \in D \\ |x_2 - x_0| < \delta}}{\forall} |f_n(x_2) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

Chcemy dowieść, że dobór δ do ε w/g powyższej receptury spełnia wymagania warunku (T), czyli że przy tym doborze

$$\underset{\substack{x \in D \\ |x - x_0| < \delta}}{\forall} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{TT}$$

Niech $x \in D$ spełnia warunek $|x - x_0| < \delta$.

Stosujemy:

Warunek (2) do $x_2 = x$:

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Warunek (1) do $x_1 = x$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

Warunek (1) do $x_1 = x_0$:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Korzystając z nierówności trójkąta oraz z nierówności (3), (4) i (5) otrzymujemy

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

co dowodzi warunku (TT), a tym samym kończy dwoód warunku (T).

Widzimy więc, że granica jednostajnie zbieżnego ciągu ograniczonych funkcji ciągłych określonych na wspólnej dziedzinie jest funkcją ciągłą.

Ponieważ szeregi to ciągi inaczej podane, to samo można sformułować w odniesieniu do szeregu funkcyjnego: Suma jednostajnie zbieżnego szeregu ograniczonych funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą. Jednak, aby z tego zrobić dobry użytek, bedziemy się musieli nauczyć dowodzenia jednostajnej zbieżności niektórych szeregów funkcyjnych.

A teraz dalsze wiadomości o zbieżności jednostajnej. Brakuje nam dwóch rzeczy:

- Jak sprawnie dowodzić[297] zbieżności jednostajnej szeregów funkcyjnych?
- Jak to jest z różniczkowalnością granicy ciągu lub sumy szeregu funkcyjnego?

[297] Napisałem "dowodzić", a nie "rozstrzygać", gdyż ze zbieżności jednostajnej możemy wyciągnąć daleko idące wnioski, a z braku zbieżności jednostajnej niewiele wynika. W konsekwencji bardziej ineresujące będą sytuacje, w których zbieżność jednostajna jest, niż takie, gdzie jej nie ma.

Ponieważ nie jest celem wykładu nadmierne wchodzenie w szczegóły teoretyczne, ograniczę się do zaprezentowania najważniejszych twierdzeń.

W zakresie zbieżności szeregów funkcyjnych, zasadniczym kryterium jest odpowiednik kryterium zbieżności bezwzględnej dla szeregów liczbowych, z tym że moduł[298] jest zastąpiony normą[299]. A dokładniej:

Jeżeli dany jest taki szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, że szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest jednostajnie zbieżny.

Zwracam uwagę, że szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ jest szeregiem o wyrazach nieujemnych i do dowodu jego zbieżności możemy wykorzystać odpowiednie kryteria z teorii szeregów liczbowych — najbardziej użyteczne wydają się kryterium porównawcze oraz kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego.

Podobnie jak w przypadku szeregów liczbowych mamy odpowiednik warunku koniecznego zbieżności, który przybiera postać kryterium:

Przypominam: Jeżeli $a_n \not\to 0$, czyli $|a_n| \not\to 0$, to szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Analogicznie:

Jeżeli $\|f_n\| \not\to 0$, to szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ nie jest zbieżny jednostajnie[300].

To załatwia problem jednostajnej zbieżności szeregów funkcyjnych w najprostszych[301] przypadkach.

Zanim wyjaśnimy sobie sprawę różniczkowalności przy przejściu granicznym, popatrzmy na dwa przykłady ciągów funkcyjnych.

Przykład 100:
Niech $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą określone wzorem:

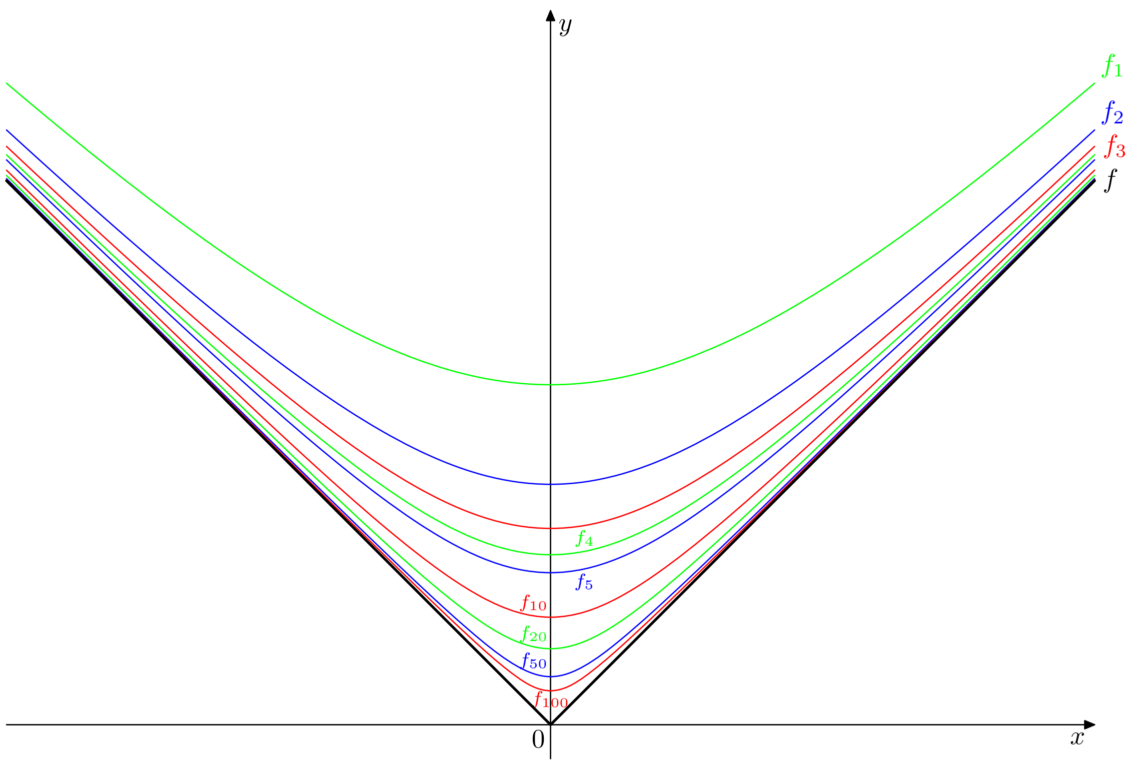
$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\,.$$

Funkcje f_n są bardzo porządne — nieskończenie wiele razy różniczkowalne na całej prostej. Ponadto

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x|\,,$$

[298] Czyli miara wielkości liczby rzeczywistej.
[299] Normą supremum, czyli przyjętą przez nas miarą wielkości funkcji.
[300] Ale może być zbieżny punktowo !!! Dlatego nie na miejscu byłoby używanie w tym miejscu słowa "rozbieżny".
[301] A bardziej skomplikowanymi przykładami zajmować się nie będziemy.

skąd wynika, że ciąg funkcyjny (f_n) jest punktowo zbieżny do funkcji f określonej wzorem $f(x)=|x|$, co możemy zapisać jako $f_n \to f$. Wykresy tych funkcji są przedstawione na rysunku 63.



rys. 63

Z oszacowań

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}-|x|\right| = \frac{1/n}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}+|x|} \leqslant \frac{1/n}{\sqrt{0+\frac{1}{n}}+0} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

w których przy $x=0$ zachodzi równość, wynika

$$\|f_n-f\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \qquad \text{przy } n\to\infty\,.$$

Wobec tego $f_n \rightrightarrows f$.

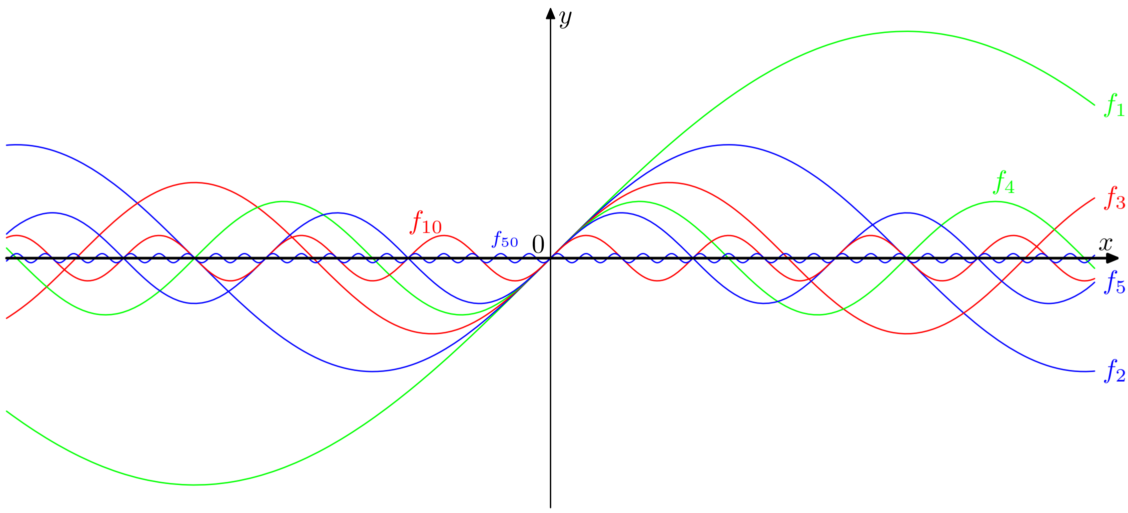
Podsumujmy: Mamy ciąg funkcyjny o bardzo porządnych wyrazach, zbieżny jednostajnie, czyli najlepiej jak w tej chwili umiemy zdefiniować. Ale graniczna funkcja nie jest różniczkowalna.

Morał: Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji różniczkowanych nie musi być różniczkowalna. Czyli **jednostajna zbieżność przy przejściu granicznym zachowuje ciągłość, ale różniczkowalności już nie musi.**

Przykład 101:
Niech $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą określone wzorem:

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}\,.$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, funkcje f_n są nieskończenie wiele razy różniczkowalne na całej prostej. Ich wykresy są przedstawione na rysunku 64.



rys. 64

Przyjmijmy $f(x) = 0$. Wówczas

$$\|f_n - f\| = \frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{przy } n \to \infty\,.$$

Wobec tego $f_n \rightrightarrows f$.

Pozornie jest lepiej niż przykładzie 1, gdyż funkcja graniczna[302] okazała się różniczkowalna nieskończenie wiele razy. Mamy też fajną[303] zbieżność ciągu funkcyjnego.

Jednak w różniczkowalności funkcji granicznej jest trochę przypadkowości. Jeśli bowiem różniczkowalność funkcji granicznej ma być jakoś powiązana z różniczkowalnością funkcji będących wyrazami ciągu funkcyjnego, to należałoby oczekiwać, że

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)\,,$$

czyli $f_n' \to f'$ (zbieżność punktowa ciągu pochodnych do pochodnej funkcji granicznej). Tymczasem

$$f_n'(x) = \cos nx\,,$$

skąd

$$f_n'(0) = 1 \to 1 \qquad \text{przy } n \to \infty\,.$$

Ale $f'(0) = 0$.

[302] Czyli funkcja stała równa 0.
[303] Czyli jednostajną.

Okazuje się, że zbieżność jednostajną można w prosty[304] sposób wzmocnić tak, aby przejście graniczne zachowywało różniczkowalność. Wystarczy założyć, że nie tylko zachodzi zbieżność jednostajna $f_n \rightrightarrows f$, ale także ciąg pochodnych (f_n') jest jednostajnie zbieżny.

Sformułujmy to wyraźnie:

Niech (f_n) będzie ciągiem funkcyjnym[305] jednostajnie[306] zbieżnym do funkcji f. Jeżeli wszystkie funkcje f_n są różniczkowalne[307] i mają ciągłe pochodne, a ciąg pochodnych (f_n') jest jednostajnie zbieżny, to graniczna funkcja f też jest różniczkowalna i przy tym f' jest ciągła. Ponadto $f_n' \rightrightarrows f'$. Innymi słowy granica ciągu pochodnych jest[308] pochodną funkcji granicznej.

To samo można przeformułować dla pochodnych wyższego rzędu:

Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji mających ciągłe pochodne do rzędu m włącznie. Załóżmy, że ciąg ten jest zbieżny jednostajnie do f. Jeżeli dla $k=1,2,3,\ldots,m$ ciąg $\left(f_n^{(k)}\right)$ jest jednostajnie zbieżny, to funkcja f ma ciągłe pochodne do rzędu m włącznie i przy tym dla każdego $k=1,2,3,\ldots,m$ i każdego x z dziedziny rozważanych funkcji mamy

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)\,.$$

[304]Prosty, gdy już wiemy to, co wiemy.

[305]Czyli zwykłe założenia, że np. wszystkie funkcje f_n są określone na tej samej dziedzinie.

[306]W zaszadzie to wystarczy jednostajna zbieżność na poziomie pochodnych, a na poziomie funkcji wystarczy założyć zbieżność punktową, a nawet tylko zbieżność wartości w jednym punkcie dziedziny, ale uważam, że formułowanie takich uogólnień przyniosłoby więcej szkody niż pożytku, bo łatwiej zapamiętać, że na obu poziomach (funkcji i ich pochodnych) ma być zbieżność jednostajna, niż pamiętać, że tu taka, a tu siaka.

[307]A więc w tym jest założenie, że dziedzina tych funkcji jest na tyle porządna (przedział lub suma przedziałów), aby można było mówić o różniczkowalności.

[308]Z założenia wiemy, że ciąg (f_n') jest jednostajnie zbieżny, a tu się okazuje, że nie do byle jakiej przypadkowej funkcji, tylko właśnie do f'.

Analogiczne twierdzenie zachodzi w przypadku szeregów funkcyjnych. Jeśli jednak uwzględnimy, że w zasadzie znamy tylko jeden sposób dowodzenia zbieżności jednostajnej szeregów funkcyjnych, schemat postępowania jest następujący:

Dany jest szereg funkcyjny[309] $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, którego wyrazy są funkcjami mającymi ciągłe pochodne do rzędu m włącznie.

Jeżeli dla[310] $k=0,1,2,\ldots,m$ szereg liczbowy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| f_n^{(k)} \right\|$$

jest zbieżny[311], to funkcja

$$f=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

ma ciągłe pochodne do rzędu m włącznie. Ponadto dla $k=1,2,3,\ldots,m$

$$f^{(k)}=\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)} .$$

Na zakończenie parę słów o szeregach potęgowych — bardziej na zasadzie luźnej opowiastki niż technicznego wykładu.

Otóż okazuje się, że jeśli szereg potęgowy ma promień zbieżności R, to w każdym przedziale $(-r,r)$, gdzie $r<R$, jest on jednostajnie zbieżny, a także jest tam jednostajnie zbieżny szereg pochodnych dowolnego rzędu jego wyrazów. Stąd wynika cały ten luksus: szereg potęgowy ma sumę nieskończenie wiele razy różniczkowalną i można go różniczkować wyraz za wyrazem.

---

[309] W tym miejscu można równie dobrze napisać $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jak i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

[310] Przypominam, że przyjmujemy iż funkcja jest swoją pochodną rzędu 0.

[311] Przypomnijmy, że ze zbieżności szeregu liczbowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\| f_n^{(k)} \right\|$ wynika zbieżność jednostajna szeregu funkcyjnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.