Szeregi liczbowe – zbieżność bezwzględna.

W tym tygodniu zajmiemy się kryteriami zbieżności szeregów o wyrazach dowolnego znaku[168].

Na początek rozważmy następujący szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n^{2020^{2020}}\right)}{n^2} .$$

Czy ten szereg ma tylko wyrazy dodatnie, czy też ma wyrazy różnych znaków? Przyjrzyjmy mu się trochę. Pierwszy wyraz to

$$\frac{\sin 1}{1^2} = \sin 1 \approx 0,841471 ,$$

jest więc dodatni.

Z kolei drugi wyraz jest równy

$$\frac{\sin\left(2^{2020^{2020}}\right)}{4} .$$

W argumencie sinusa jest liczba większa od $10^{10^{6676}}$. Wartość sinusa zależy od tego, jak ta liczba jest położona względem wielokrotności π. Żeby to ustalić, trzeba byłoby znać liczbę π z dokładnością do ponad 10^{6676} cyfr po przecinku. Czy znamy lub kiedyś poznamy liczbę π z taką dokładnością? Biorąc pod uwagę, że liczba cząsteczek we wszechświecie jest mniejsza od 10^{100}, do zapisania tak dokładnego przybliżenia liczby π potrzebowalibyśmy więcej niż 10^{6576} wszechświatów. Tak więc w/g naszej najlepszej wiedzy drugi wyraz szeregu jest jakąś liczbą pomiędzy $-1/4$ i $1/4$.

Wydaje się wprost nieprawdopodobne, aby wszystkie wyrazy szeregu były dodatnie[169], ale trudno wyobrazić sobie dowód, że występuje w nim choćby jeden wyraz ujemny.

Skoro tak mało wiemy o wyrazach tego szeregu, jak mamy rozstrzygnąć jego zbieżność?

Z pomocą przyjdzie nam kryterium zbieżności bezwzglednej.

Kryteria zbieżności szeregów (cz. III).

9. Zbieżność bezwzględna.
Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Zastosowanie tego kryterium do rozważanego szeregu każe nam spojrzeć na szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin\left(n^{2020^{2020}}\right)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\sin\left(n^{2020^{2020}}\right)\right|}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty ,$$

który jest zbieżny na mocy kryterium porównawczego.

[168] Czyli niekoniecznie o samych wyrazach nieujemnych.
[169] Bo wydaje się, że znaki wyrazów są kompletnie przypadkowe.

Podsumowując: Załóżmy, że badamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jeżeli udowodnimy (na przykład przez zastosowanie kryterium porównawczego), że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to możemy stąd wywnioskować, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. W takiej sytuacji powiemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, a ponadto zachodzi nierówność[170]

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \,.$$

Uwaga: Naturalne jest pytanie: Czy jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest rozbieżny, to rozbieżny musi być także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

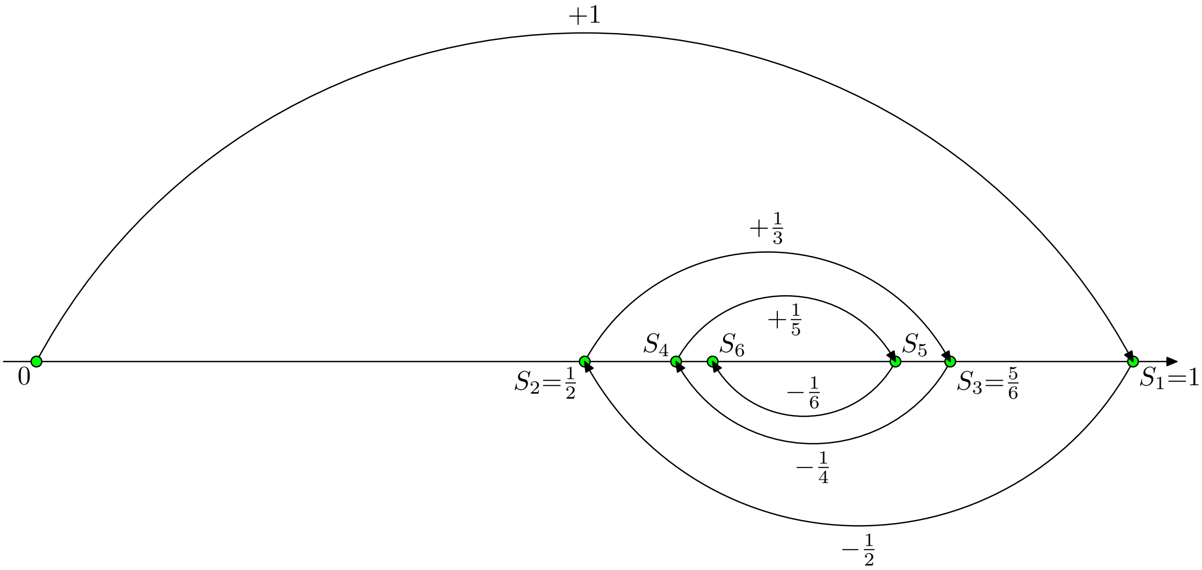
Zaraz się przekonamy, że tak być nie musi – poznamy przykład szeregu, który jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Szereg anharmoniczny, czyli modelowy przykład szeregu, który jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Szereg anharmoniczny wygląda następująco:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots\,.$$

Szereg wartości bezwzględnych jego wyrazów to szereg harmoniczny, który jest rozbieżny. A dlaczego szereg anharmoniczny jest zbieżny? Spróbujmy prześledzić ciąg jego sum częściowych (rys. 54 i 55).



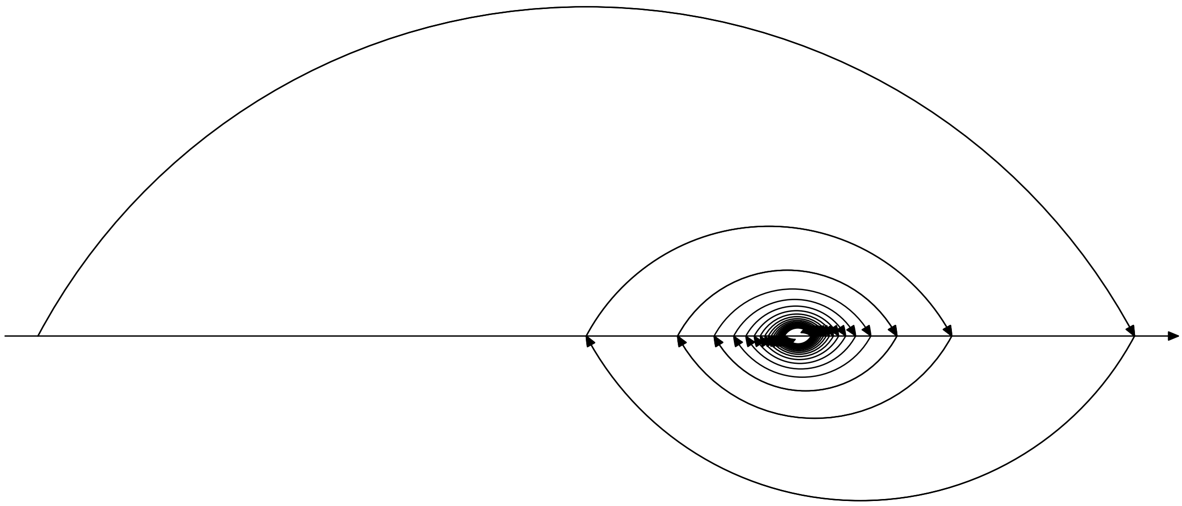
rys. 54

[170]Taka nierówność trójkąta dla nieskończenie wielu składników.

Startujemy od zera, czyli jakby zerowej sumy częściowej S_0. Dodajemy pierwszy wyraz równy 1. Potem odejmujemy 1/2 (mniej niż przed chwilą dodaliśmy). Następnie dodajemy 1/3 (mniej niż przed chwilą odjęliśmy). Następnie odejmujemy 1/4 (mniej niż przed chwilą dodaliśmy). Następnie dodajemy 1/5 (mniej niż przed chwilą odjęliśmy). I tak dalej. Na przemian dodajemy i odejmujemy liczby, przy czym każda kolejna ma mniejszą wartość bezwzględną niż poprzednia.

Wynika stąd, że sumy częściowe o parzystych indeksach tworzą ciąg rosnący, a sumy częściowe o indeksach nieparzystych malejący[171]:

$$S_2 < S_4 < S_6 < S_8 < S_{10} < \ldots < S_9 < S_7 < S_5 < S_3 < S_1 \,.$$



rys. 55

Mamy więc dwa ciągi monotoniczne i ograniczone: $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$. Ciągi te są zbieżne[172], powiedzmy odpowiednio do granic g_1 i g_2. Ponieważ jednak

$$S_{2n} = S_{2n-1} - \frac{1}{2n} \,,$$

otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \,,$$

skąd $g_1 = g_2 - 0$, czyli $g_1 = g_2$. Ponieważ ciąg sum częściowych rozbiliśmy na dwa podciągi zbieżne do wspólnej granicy, wynika stąd, że jest on zbieżny. A to oznacza, że zbieżny jest rozważany przez nas szereg anharmoniczny.

Jeżeli zastanowimy się, co było istotne w tym dowodzie zbieżności szeregu, to dojdziemy do wniosku, że korzystaliśmy z trzech założeń:
• wyrazy szeregu są na przemian dodatnie i ujemne,
• każdy kolejny wyraz jest co do wartości bezwzględnej mniejszy[173] niż poprzedni,
• wyrazy szeregu dążą do zera.

[171]A przy tym każda suma częsciowa o indeksie parzystym jest mniejsza od każdej sumy częściowej o indeksie nieparzystym.
[172]Pamiętamy, że każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny, prawda?
[173]Wystarczy "nie większy".

To prowadzi nas do kryterium Leibniza zwanego też kryterium zbieżności szeregów naprzemiennych.

Kryteria zbieżności szeregów (cz. IV).

10. SZEREGI NAPRZEMIENNE.
Jeżeli (a_n) jest ciągiem nierosnącym zbieżnym do 0, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^{n+1}$$

jest zbieżny[174].

*　* * *　* * * * *　* * *　*
*　* * *　*

A teraz przykłady wykorzystania kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych. Należy pamiętać, że bardzo ważne jest precyzyjne sformułowanie warunków tego kryterium, nawet tych, których spełnianie jest oczywiste.

Warunki są trzy:

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne – na ogół jest to oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
To może być oczywiste, a może wymagać pewnego nietrudnego rachunku.

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.
To może być oczywiste, a może wymagać rachunków na tyle nieoczywistych, że w tym właśnie warunku leży główna trudność zadania.

Czasami może się zdarzyć, że ciąg wartości bezwzględnych wyrazów szeregu jest nierosnący dopiero od pewnego miejsca. Jeśli powołujemy się na kryterium Leibniza w wersji, w której założenie brzmi "ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący", to powinniśmy odrzucić ileś tam początkowych wyrazów szeregu i powołać się na to, że odrzucenie początkowych wyrazów nie wpływa na zbieżność, a samo kryterium Leibniza zastosować do szeregu z usuniętymi początkowymi wyrazami. Pamiętaj: Jeżeli ciąg modułów wyrazów szeregu nie jest nierosnący od samego początku, a Twoje rachunki tego nie wykryją, to znaczy, że rozwiązanie jest błędne (nieświadomy błąd rachunkowy lub świadomy blef: przerywamy rachunki w połowie i piszemy, ze wychodzi).

---

[174] Równie dobrze można podać tu szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n$.

Przykład 70:
Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(n+1)\cdot(n+2)} .$$

Rozwiązanie:
Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
Sprawdzamy to następująco:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)\cdot(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{0}{1\cdot 1} = 0 .$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.
Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność
$$\frac{n}{(n+1)\cdot(n+2)} \geqslant \frac{n+1}{(n+2)\cdot(n+3)} ,$$
co kolejno jest równoważne nierównościom
$$\frac{n}{n+1} \geqslant \frac{n+1}{n+3} ,$$
$$n\cdot(n+3) \geqslant (n+1)\cdot(n+1) ,$$
$$n^2+3n \geqslant n^2+2n+1 ,$$
$$n \geqslant 1 ,$$
skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Przykład 71:
Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (7n-6) \cdot (7n+1)}{(5n-4) \cdot (5n+1) \cdot (5n+6)} \, .$$

Rozwiązanie:
Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(7n-6) \cdot (7n+1)}{(5n-4) \cdot (5n+1) \cdot (5n+6)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(7-\frac{6}{n}\right) \cdot \left(7+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(5-\frac{4}{n}\right) \cdot \left(5+\frac{1}{n}\right) \cdot \left(5+\frac{6}{n}\right)} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 0}{5 \cdot 5 \cdot 5} = 0 \, .$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(7n-6) \cdot (7n+1)}{(5n-4) \cdot (5n+1) \cdot (5n+6)} \geqslant \frac{(7n+1) \cdot (7n+8)}{(5n+1) \cdot (5n+6) \cdot (5n+11)} \, ,$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\frac{7n-6}{5n-4} \geqslant \frac{7n+8}{5n+11} \, ,$$

$$(7n-6) \cdot (5n+11) \geqslant (7n+8) \cdot (5n-4) \, ,$$

$$35n^2 + 77n - 30n - 66 \geqslant 35n^2 - 28n + 40n - 32 \, ,$$

$$35n^2 + 47n - 66 \geqslant 35n^2 + 12n - 32 \, ,$$

$$35n \geqslant 34 \, ,$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Zapoznaliśmy się z szeregiem anharmonicznym

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\ldots,$$

który jest zbieżny. Możemy przeorganizować jego wyrazy tak, aby brać po dwa wyrazy dodatnie na przemian z jednym wyrazem ujemnym, nie zmieniając przy tym wzajemnej kolejności wyrazów tego samego znaku:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\frac{1}{10}+\ldots$$

W jednej i drugiej wersji tego szeregu wstawmy nawiasy[175]:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{=5/6}+\underbrace{\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)}_{<0}+\underbrace{\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)}_{<0}+\underbrace{\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)}_{<0}+\underbrace{\left(-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}\right)}_{<0}+\underbrace{\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{13}\right)}_{<0}+\ldots$$

$$\underbrace{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}_{=5/6}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)}_{=\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}>0}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)}_{=\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}>0}+\underbrace{\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}\right)}_{>0}+\underbrace{\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\frac{1}{10}\right)}_{>0}+\ldots$$

Popatrz uważnie na powyższe wzorki i odpowiedz na pytanie:

Czy suma szeregu anharmonicznego jest mniejsza czy większa od 5/6?

Patrząc na pierwszy szereg, czyli oryginalny szereg anharmoniczny, widzimy pierwsze trzy wyrazy o sumie $5/6$, a następujące dalej wyrazy można połączyć w pary o ujemnej sumie. Płynie stąd wniosek, że suma szeregu anharmonicznego jest mniejsza od $5/6$.

Z kolei patrząc na drugi szereg, czyli spermutowany szereg anharmoniczny, widzimy pierwsze trzy wyrazy o sumie $5/6$, a następujące dalej wyrazy można połączyć w trójki o dodatniej sumie. Płynie stąd wniosek, że suma tego szeregu jest większa od $5/6$.

Pozornie wygląda to na sprzeczność, bo dodajemy te same wyrazy, a otrzymujemy różne sumy. Ale przecież przemienność dodawania dotyczy skończenie wielu składników, a w szeregu składników jest nieskończenie wiele. Być może nie można beztrosko zmieniać kolejności wyrazów szeregu. Tę kwestię wyjąśnię dogłębnie później, a na razie zajmijmy się szeregiem harmonicznym i podaną wyżej jego permutacją.

[175] To nie jest nic podejrzanego, po prostu chcę zwrocić uwagę na sumy pewnych grupek kolejnych wyrazów. Ogólnie: W szeregu można bezkarnie wstawiać nawiasy, jeśli ciąg wyrazów szeregu dąży do zera, a w nawiasach jest ograniczona liczba wyrazów – w tym wypadku w nawiasach są nie więcej niż 3 wyrazy. Wstawienie nawiasów w szeregu oznacza pominięcie pewnych sum częściowych. Jeśli dalekie wyrazy są małe, to pominięte sumy częściowe mało różnią się od sum, które pozostawiamy, więc nie wpływa to na zbieżność ciągu sum częściowych, czyli na zbieżność szeregu.

Przykład 72:
Zakładając, że
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = S$$
obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego, w której na przemian występują dwa wyrazy dodatnie i jeden ujemny:
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\frac{1}{10}+\frac{1}{21}+\frac{1}{23}-\frac{1}{12}+\ldots$$
Wskazówka: Obliczyć sumę częściową $3n$ początkowych wyrazów i wyłączyć z niej sumę częściową szeregu anharmonicznego.

Rozwiązanie:
Sposób I:

Ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, jego zbieżność (i sumę) można zbadać rozważając tylko co trzecią sumę częściową. Otrzymujmy[176]
$$S_{3n} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2i-1}\,.$$
Skoro zakładamy, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = S$, definicja zbieżności szeregu daje
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = S\,.$$
Ponadto oznaczając $f(x)=1/(2x)$ otrzymujemy[177]
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2i-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{(2i-1)/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot \sum_{i=n+1}^{2n} f\left(\frac{i-1/2}{n}\right) = \int_1^2 f(x)\,dx =$$
$$= \int_1^2 \frac{dx}{2x} = \frac{\ln|x|}{2}\bigg|_{x=1}^{2} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 1}{2} = \frac{\ln 2}{2}\,.$$
Ostatecznie
$$\lim_{n\to\infty} S_{3n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{2i-1} \right) = S + \frac{\ln 2}{2}\,.$$

---

[176] Jeśli brak Ci biegłości w operowaniu sumami zapisanymi przy pomocy $\sum$, zapisz każdą sumę występującą w przedstawionych rachunkach "z kropeczkami", aby wyobrazić sobie, jakie składniki w niej występują.

[177] Korzystamy tu ze wzoru: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot \sum\limits_{i=n+1}^{2n} f\left(\frac{i-1/2}{n}\right) = \int\limits_1^2 f(x)\,dx$. Wzór ten przedstawia całkę po przedziale $[1,2]$ jako granicę ciągu sum całkowych Riemanna odpowiadających podziałowi przedziału $[1,2]$ na n przedziałów równej długości i wzięciu wartości funkcji f w środku każdego z przedziałów podziału. Jeśli ten wzór wygląda dla Ciebie zbyt abstrakcyjnie, weź $n=5$, wypisz pięć składników sumy Riemanna $\sum\limits_{i=6}^{10} \frac{1}{5} f\left(\frac{i-1/2}{5}\right)$ i zinterpretuj je na rysunku jako pola prostokątów wystawionych na przedziałach podziału do wysokości wartości funkcji w środku każdego przedziału.

Odpowiedź:

Suma danego szeregu jest równa $S+\frac{\ln 2}{2}$.

A teraz inny sposób rozwiązania – dość trudno na niego wpaść, ale przynajmniej prześledź, że to też działa. I nie wymaga żadnych całek i sum Riemanna.

Sposób II:

Ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, jego zbieżność (i sumę) można zbadać rozważając tylko co trzecią sumę częściową. Otrzymujmy[178]

$$S_{3n}=\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2i-1}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i}=\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2i-1}-2\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i}=\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2i-1}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2i-1}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i-2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i-2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i}=\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2i-1}-\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2i}+\sum_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^{i+1}}{2i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{4n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^{i+1}}{i},$$

co przy $n\to\infty$ dąży do $\frac{3}{2}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{i}=\frac{3\cdot S}{2}$.

Odpowiedź:

Suma danego szeregu jest równa $\frac{3\cdot S}{2}$.

Rozwiązując zadanie dwoma sposobami otrzymaliśmy dwie odpowiedzi różnej postaci: $S+\frac{\ln 2}{2}$ oraz $\frac{3\cdot S}{2}$. Ponieważ obie te liczby muszą być równe, otrzymujemy stąd $S=\ln 2$.

Zapamiętaj:

Suma szeregu anharmonicznego jest równa ln2.

Na razie wygląda to na wynik wyciągniety z kapelusza, ale niedługo poznamy powody, dla których suma szeregu anharmonicznego jest właśnie taka.

[178] Bardzo uważnie sprawdź, że

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i-2}=\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2i},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i-2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i}=\sum_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^{i+1}}{2i}$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2i-1}-\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{2i}=\sum_{i=1}^{4n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}.$$

Przykład 73:
Wiedząc, że
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2\,,$$
obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego, w której na przemian występują trzy wyrazy dodatnie i jeden ujemny:
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{4}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{6}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{23}-\frac{1}{8}+\frac{1}{25}+\frac{1}{27}+\frac{1}{29}-\frac{1}{10}+\ldots$$

Rozwiązanie:
Ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, jego zbieżność (i sumę) można zbadać rozważając tylko co czwartą sumę częściową. Otrzymujmy
$$S_{4n}=\sum_{i=1}^{3n}\frac{1}{2i-1}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i}=\sum_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}+\sum_{i=n+1}^{3n}\frac{1}{2i-1}\,.$$
Skoro wiemy, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$, definicja zbieżności szeregu daje
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}=\ln 2\,.$$
Ponadto oznaczając $f(x)=1/(2x)$ otrzymujemy
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n+1}^{3n}\frac{1}{2i-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=n+1}^{3n}\frac{1}{(2i-1)/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=n+1}^{3n}f\left(\frac{i-1/2}{n}\right)=\int_1^3 f(x)\,dx=$$
$$=\int_1^3\frac{dx}{2x}=\frac{\ln|x|}{2}\Bigg|_{x=1}^{3}=\frac{\ln 3}{2}-\frac{\ln 1}{2}=\frac{\ln 3}{2}\,.$$
Ostatecznie
$$\lim_{n\to\infty}S_{4n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}+\sum_{i=n+1}^{3n}\frac{1}{2i-1}\right)=\ln 2+\frac{\ln 3}{2}\,.$$

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa $\ln 2+\frac{\ln 3}{2}$.

A teraz wyczerpująca odpowiedź na pytanie:

Jak to jest z permutowaniem szeregów?

Jak to jest z permutowaniem szeregów?

Właśnie wyliczyliśmy sumę szeregu anharmonicznego oraz dwóch[179] jego permutacji:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\ldots=\ln 2\approx \mathbf{0,6931}$$

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{8}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\frac{1}{10}+\ldots=\frac{3\ln 2}{2}\approx \mathbf{1,0397}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{4}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{6}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{23}+\ldots=\ln 2+\frac{\ln 3}{2}\approx \mathbf{1,2425}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{2}+\frac{1}{201}+\frac{1}{203}+\ldots+\frac{1}{399}-\frac{1}{4}+\frac{1}{401}+\frac{1}{403}+\ldots+\frac{1}{599}-\frac{1}{6}+$$
$$+\frac{1}{601}+\frac{1}{603}+\ldots+\frac{1}{799}-\frac{1}{8}+\frac{1}{801}+\frac{1}{803}+\ldots+\frac{1}{999}-\frac{1}{10}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1003}+\ldots=\ln 20\approx \mathbf{2,9957}$$

Każda z tych czterech permutacji prowadzi do innej sumy. Czyli jest źle. Jak źle? Ano tak źle, że gorzej już być nie może. Okazuje się bowiem, że można z góry zadać liczbę rzeczywistą, a znajdzie się permutacja szeregu anharmonicznego o sumie równej tej właśnie zadanej liczbie. Chcecie tak spermutować szereg anharmoniczny, aby otrzymać szereg zbieżny o sumie $\sqrt{2}$? Proszę uprzejmie.

Pokażę, jak stworzyć taką permutację. Przede wszystkim umówmy się, że nie będziemy zmieniać wzajemnej kolejności wyrazów dodatnich, jak również zachowamy kolejność wyrazów ujemnych. Czyli tak: wyrazy dodatnie dajemy na jedną kupkę:

$$1,\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{1}{7},\quad \frac{1}{9},\quad \frac{1}{11},\quad \frac{1}{13},\quad \frac{1}{15},\quad \frac{1}{17},\quad \frac{1}{19},\quad \frac{1}{21},\quad \frac{1}{23},\quad \ldots$$

a wyrazy ujemne na drugą:

$$-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{6},\ -\frac{1}{8},\ -\frac{1}{10},\ -\frac{1}{12},\ -\frac{1}{14},\ -\frac{1}{16},\ -\frac{1}{18},\ -\frac{1}{20},\ -\frac{1}{22},\ -\frac{1}{24},\ \ldots$$

Konstrukcja permutacji szeregu będzie polegała na odpowiednim dobieraniu wyrazów raz z jednej, raz z drugiej kupki. Przy tym odnotujmy, że każda z dwóch kupek zawiera nieskończenie wiele wyrazów o nieskończonej sumie[180]. Zauważmy też, że uszczuplenie którejkolwiek kupki o skończenie wiele wyrazów nie narusza tej własności: nadal będzie tam nieskończenie wiele wyrazów o nieskończonej sumie.

[179] A trzecia podana tu permutacja będzie na ćwiczeniach.

[180] A precyzyjniej: w przypadku drugiej kupki suma jest równa minus nieskończoności. Ale darujmy sobie ten minus, aby nie komplikować sformułowań – chyba rozumiemy, że jak kupka zawiera same wyrazy ujemne, to mówienie o ich nieskończonej sumie jest w gruncie rzeczy uproszonym wyrażaniem tego, że ich suma jest minus nieskończonością.

Naszym celem jest skonstruowanie szeregu o sumie $\sqrt{2}\approx 1,41421$. Startujemy od zerowej sumy częściowej $S_0=0$, która jest mniejsza od $\sqrt{2}$. Wobec tego wybieramy tyle[181] wyrazów dodatnich, aby odpowiednia suma częściowa przekroczyła $\sqrt{2}$. Tak się składa, że taki efekt uzyskamy po uwzględnieniu trzech wyrazów dodatnich:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\approx 1,53333>1,41421\,.$$

Teraz dobieramy tyle wyrazów ujemnych, aby zejść z sumą częściową poniżej $\sqrt{2}$. Okazuje się, że wystarczy wziąć jeden wyraz:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\approx 1,03333<1,41421\,.$$

Następnie dobieramy wyrazy dodatnie, aby suma częściowa weszła powyżej $\sqrt{2}$:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\approx 1,45513>1,41421\,.$$

I wyrazami ujemnymi zjeżdżamy z sumą częściową poniżej $\sqrt{2}$:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{4}\approx 1,20513<1,41421\,.$$

I tak dalej i tak dalej. Jak to wygląda w praktyce możesz prześledzić na następnej stronie, gdzie wypisane są kolejne bloki wyrazów dodatnich/ujemnych oraz skumulowane sumy częściowe.

Ponieważ zarówno wyrazy dodatnie, jak i wyrazy ujemne mają nieskończone sumy, zawsze będziemy mieli dość "paliwa", aby jeździć z sumą częściową w górę i w dół tak daleko, jak tylko chcemy. A ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, dalekie sumy częściowe będą bardzo bliskie $\sqrt{2}$, bo nigdy nie odjeżdżamy od $\sqrt{2}$ dalej niż jest to wymuszone skwantowaniem naszych ruchów[182].

Oczywiście nigdzie nie korzystałem ze szczególnych własności $\sqrt{2}$, równie dobrze mogłem wziąć jakąkolwiek inną liczbę rzeczywistą.

Morał z tego jest taki, jak wcześniej zapowiedziałem: Permutując wyrazy szeregu anharmonicznego możemy uzyskać szereg zbieżny o dowolnie zadanej sumie. Czy naprawdę jest aż tak źle? Ależ skąd, jest jeszcze gorzej. Ponieważ mamy dość paliwa, aby z sumami częściowymi jeździć w te i we wte, możemy zrealizować także inne scenariusze manipulowania sumami częściowymi poprzez odpowiednie dozowanie wyrazów dodatnich/ujemnych:

• Jedziemy w górę powyżej 1, robimy kroczek w dół, jedziemy w górę powyżej 2, kroczek w dół, w górę powyżej 3 i tak dalej. Dostajemy szereg rozbieżny do nieskończoności.

• Jedziemy w górę powyżej π, w dół poniżej e, w górę powyżej π, w dół poniżej e, w górę powyżej π, w dół poniżej e i tak dalej. Dostajemy szereg rozbieżny, którego sumy częściowe oscylują między e i π.

• Trzeci scenariusz na stronie 128.

[181]Tu i wszędzie dalej wybieramy możliwie najmniej wyrazów – wybieranie wyrazów dodatnich przerywamy po pierwszym wyrazie, który spowoduje przekroczenie $\sqrt{2}$.

[182]Nasze ruchy są skwantowane, bo dodajemy od razu całe wyrazy szeregu.

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\approx 1,53333$$
$$-\frac{1}{2}\approx 1,03333$$
$$+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\approx 1,45513$$
$$-\frac{1}{4}\approx 1,20513$$
$$+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}\approx 1,43087$$
$$-\frac{1}{6}\approx 1,26421$$
$$+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\frac{1}{27}+\frac{1}{29}\approx 1,41921$$
$$-\frac{1}{8}\approx 1,29421$$
$$+\frac{1}{31}+\frac{1}{33}+\frac{1}{35}+\frac{1}{37}+\frac{1}{39}\approx 1,43801$$
$$-\frac{1}{10}\approx 1,33801$$
$$+\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{45}+\frac{1}{47}\approx 1,42915$$
$$-\frac{1}{12}\approx 1,34582$$
$$+\frac{1}{49}+\frac{1}{51}+\frac{1}{53}+\frac{1}{55}\approx 1,42288$$
$$-\frac{1}{14}\approx 1,35146$$
$$+\frac{1}{57}+\frac{1}{59}+\frac{1}{61}+\frac{1}{63}\approx 1,41821$$
$$-\frac{1}{16}\approx 1,35571$$
$$+\frac{1}{65}+\frac{1}{67}+\frac{1}{69}+\frac{1}{71}\approx 1,41460$$
$$-\frac{1}{18}\approx 1,35905$$
$$+\frac{1}{73}+\frac{1}{75}+\frac{1}{77}+\frac{1}{79}+\frac{1}{81}\approx 1,42407$$
$$-\frac{1}{20}\approx 1,37407$$
$$+\frac{1}{83}+\frac{1}{85}+\frac{1}{87}+\frac{1}{89}\approx 1,42061$$
$$-\frac{1}{22}\approx 1,37516$$
$$+\frac{1}{91}+\frac{1}{93}+\frac{1}{95}+\frac{1}{97}\approx 1,41774$$
$$-\frac{1}{24}\approx 1,37607$$
$$+\frac{1}{99}+\frac{1}{101}+\frac{1}{103}+\frac{1}{105}\approx 1,41530$$
$$-\frac{1}{26}\approx 1,37684$$
$$+\frac{1}{107}+\frac{1}{109}+\frac{1}{111}+\frac{1}{113}+\frac{1}{115}\approx 1,42192$$
$$-\frac{1}{28}\approx 1,38620$$
$$+\frac{1}{117}+\frac{1}{119}+\frac{1}{121}+\frac{1}{123}\approx 1,41955$$
$$-\frac{1}{30}\approx 1,38621$$
$$+\frac{1}{125}+\frac{1}{127}+\frac{1}{129}+\frac{1}{131}\approx 1,41747$$
$$-\frac{1}{32}\approx 1,38622$$
$$+\frac{1}{133}+\frac{1}{135}+\frac{1}{137}+\frac{1}{139}\approx 1,41564$$
$$-\frac{1}{34}\approx 1,38623$$
$$+\frac{1}{141}+\frac{1}{143}+\frac{1}{145}+\frac{1}{147}+\frac{1}{149}\approx 1,42073$$
$$-\frac{1}{36}\approx 1,39295$$
$$+\frac{1}{151}+\frac{1}{153}+\frac{1}{155}+\frac{1}{157}\approx 1,41893$$
$$-\frac{1}{38}\approx 1,39261$$
$$+\frac{1}{159}+\frac{1}{161}+\frac{1}{163}+\frac{1}{165}\approx 1,41731$$
$$-\frac{1}{40}\approx 1,39231$$
$$+\frac{1}{167}+\frac{1}{169}+\frac{1}{171}+\frac{1}{173}\approx 1,41584$$
$$-\frac{1}{42}\approx 1,39203$$
$$+\frac{1}{175}+\frac{1}{177}+\frac{1}{179}+\frac{1}{181}\approx 1,41451$$
$$-\frac{1}{44}\approx 1,39178$$
$$+\frac{1}{183}+\frac{1}{185}+\frac{1}{187}+\frac{1}{189}+\frac{1}{191}\approx 1,41852$$
$$-\frac{1}{46}\approx 1,39679$$
$$+\frac{1}{193}+\frac{1}{195}+\frac{1}{197}+\frac{1}{199}\approx 1,41720$$
$$-\frac{1}{48}\approx 1,39636$$
$$+\frac{1}{201}+\frac{1}{203}+\frac{1}{205}+\frac{1}{207}\approx 1,41597$$
$$-\frac{1}{50}\approx 1,39597$$
$$+\frac{1}{209}+\frac{1}{211}+\frac{1}{213}+\frac{1}{215}\approx 1,41484$$
$$-\frac{1}{52}\approx 1,39561$$
$$+\frac{1}{217}+\frac{1}{219}+\frac{1}{221}+\frac{1}{223}+\frac{1}{225}\approx 1,41824$$
$$-\frac{1}{54}\approx 1,39972$$
$$+\frac{1}{227}+\frac{1}{229}+\frac{1}{231}+\frac{1}{233}\approx 1,41712$$
$$-\frac{1}{56}\approx 1,39926$$
$$+\frac{1}{235}+\frac{1}{237}+\frac{1}{239}+\frac{1}{241}\approx 1,41607$$
$$-\frac{1}{58}\approx 1,39882$$
$$+\frac{1}{243}+\frac{1}{245}+\frac{1}{247}+\frac{1}{249}\approx 1,41509$$
$$-\frac{1}{60}\approx 1,39842$$
$$+\frac{1}{251}+\frac{1}{253}+\frac{1}{255}+\frac{1}{257}+\frac{1}{259}\approx 1,41803$$
$$-\frac{1}{62}\approx 1,40190$$
$$+\frac{1}{261}+\frac{1}{263}+\frac{1}{265}+\frac{1}{267}\approx 1,41705$$
$$-\frac{1}{64}\approx 1,40143$$
$$+\frac{1}{269}+\frac{1}{271}+\frac{1}{273}+\frac{1}{275}\approx 1,41614$$
$$-\frac{1}{66}\approx 1,40098$$
$$+\frac{1}{277}+\frac{1}{279}+\frac{1}{281}+\frac{1}{283}\approx 1,41527$$
$$-\frac{1}{68}\approx 1,40056$$
$$+\frac{1}{285}+\frac{1}{287}+\frac{1}{289}+\frac{1}{291}\approx 1,41445$$
$$-\frac{1}{70}\approx 1,40017$$
$$+\frac{1}{293}+\frac{1}{295}+\frac{1}{297}+\frac{1}{299}+\frac{1}{301}\approx 1,41701$$
$$-\frac{1}{72}\approx 1,40312$$

• Jedziemy w górę powyżej 1, w dół poniżej -2, w górę powyżej 3, w dół poniżej -4, w górę powyżej 5, w dół poniżej -6 i tak dalej. Dostajemy szereg rozbieżny, którego sumy częściowe wariują między $-\infty$ i $+\infty$ – ciąg sum częściowych jest nieograniczony z dołu i nieograniczony z góry.

Wniosek: Permutując wyrazy szeregu anharmonicznego możemy uzyskać szereg zbieżny o dowolnie zadanej sumie albo szereg rozbieżny, przy czym ta rozbieżność może mieć praktycznie dowolny charakter.

Wniosek 2: Nigdzie nie korzystaliśmy z tego, że szereg jest akurat szeregiem anharmonicznym. Istotnie było to, że wyrazy dodatnie mają niekończoną sumę i wyrazy ujemne mają nieskończoną sumę.

Teraz kilka definicji (starych i nowych):

Szereg zbieżny bezwzględnie: Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Szereg zbieżny względnie[183]**:** Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest względnie zbieżny, jeśli jest on zbieżny, ale szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest rozbieżny.

Szereg zbieżny bezwarunkowo: Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwarunkowo zbieżny, jeśli jest zbieżny i każda jego permutacja jest szeregiem zbieżnym mającym tę samą sumę co on.

Szereg zbieżny warunkowo: Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest warunkowo zbieżny, jeśli jest zbieżny, ale nie każda jego permutacja jest szeregiem zbieżnym mającym tę samą sumę co on.

Okazuje się, że w zakresie szeregów liczbowych zbieżność bezwzględna jest równoważna zbieżności bezwarunkowej, a więc w konsekwencji zbieżność względna jest równoważna zbieżności warunkowej.

Innymi słowy: **Jeśli szereg jest zbieżny bezwzględnie, to możemy beztrosko zmieniać kolejność jego wyrazów, a on pozostanie zbieżny i jego suma się nie zmieni.**

Jeśli natomiast szereg jest zbieżny, ale nie bezwzględnie, to permutując jego wyrazy możemy uzyskać szereg zbieżny o dowolnej sumie albo szereg rozbieżny[184]**.**

[183] Używam tu określenia "względnej zbieżności", bo pozwala ono na zgrabne sformułowanie tej definicji, ale nie jest to nazwa szeroko stosowana. Mniej wątpliwości budzi trochę toporne, ale lepiej zrozumiałe określenie "szereg zbieżny, ale nie bezwzględnie".

[184] Jest to twierdzenie Riemanna o szeregach warunkowo zbieżnych.

I w zasadzie na tym można byłoby zakończyć, ale pojawia się naturalne pytanie: skoro zbieżność bezwzględna to jest to samo, co zbieżność bezwarunkowa, a zbieżność względna jest tym samym, co zbieżność warunkowa, to w imię jakiej szczytnej idei funkcjonuje tu podwójne nazewnictwo? I tak w praktyce wybieramy formy zgrabniejsze: szereg zbieżny bezwzględnie oraz szereg zbieżny warunkowo.

Pamiętacie z pierwszego semestru warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu? Warunek ten jest równoważny zbieżności ciągu, ale...

No właśnie, jest tu jakieś "ale". Gdyby rozważać zbieżność ciągów i warunek Cauchy'ego w bardziej abstrakcyjnych przestrzeniach[185], to okazałoby się, że każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego[186], ale w drugą stronę to już różnie bywa. Jako przykład podałem Wam świat liczb wymiernych, gdzie warunek Cauchy'ego nie wymusza zbieżności, bo np. ciąg liczb wymiernych zbieżny do $\sqrt{2}$ spełnia w tym świecie warunek Cauchy'ego, ale nie jest zbieżny, bo nie ma w świecie liczb wymiernych liczby, która byłaby jego granicą. Z tym wiąże się własność przestrzeni metrycznych zwana zupełnością[187].

Podobnie rzecz się ma z wymienionymi wyżej rodzajami zbieżności. Można powiedzieć tak: W każdej sytuacji szereg zbieżny bezwzględnie jest bezwarunkowo zbieżny. Ale w drugą stronę to już różnie bywa, jeśli wejdziemy w bardziej abstrakcyjne teorie matematyczne.

Wyobraźcie sobie nieskończenie wymiarową przestrzeń euklidesową[188]. Myślcie o takiej przestrzeni euklidesowej, gdzie jest nieskończenie wiele osi, a każdy wektor ma nieskończenie wiele współrzędnych. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że długość wektora to pierwiastek z sumy kwadratów jego współrzędnych, a ponieważ chcemy, aby długości wektorów, czy też odległości między punktami były skończone, wymagamy skończoności sumy kwadratów współrzędnych.

W tejże przestrzeni mamy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$, gdzie e_n jest wersorem n-tej osi[189].

Odpowiednikiem szeregu wartości bezwzględnych wyrazów jest szereg długości wektorów będących jego wyrazami. Ponieważ wektor $\frac{e_n}{n}$ ma długość $\frac{1}{n}$, szereg długości[190] wektorów-wyrazów szeregu jest szeregiem harmonicznym, a więc rozbieżnym. Tak więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ uchodzi za szereg zbieżny, ale nie bezwzględnie. Tymczasem jest on zbieżny bezwarunkowo, bo jego wyrazy można beztrosko permutować i zawsze dostaniemy szereg zbieżny o sumie będącej wektorem $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\right)$. A to dlatego, że każdy wyraz tego szeregu żyje na innej współrzędnej i nie wchodzi w drogę innym wyrazom.

---

[185] Konkretnie chodzi tu o przestrzenie metryczne.

[186] Czyli spełniającym warunek Cauchy'ego.

[187] Z definicji: przestrzeń metryczna jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

[188] Jest to, mówiąc w uproszczeniu, przestrzeń Hilberta.

[189] Czyli wektorem jednostkowym w kierunku tej osi – ma on n-tą współrzędną równą 1, a pozostałe współrzędne zerowe.

[190] Fachowo nazywa się to normą wektora.