Szeregi liczbowe – kryterium porównawcze.

A teraz przypomnienie tego, co było w pierwszym semestrze, a mianowicie kryterium porównawcze.

W zasadzie zaprezentuję tylko kilka przykładów do odświeżenia i przećwiczenia stosowania kryterium porównawczego, ale jeszcze raz do znudzenia przypomnę bardzo ważny przykład:

Szereg harmoniczny

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

jest rozbieżny. **Jest to przykład szeregu rozbieżnego, którego wyrazy dążą do zera.**

Przypominam też, że w przypadku szeregu o wyrazach nieujemnych możemy wyrazić fakt jego zbieżności lub rozbieżności bez słów – wystarczy porównać sumę szeregu z ∞. Suma ta bowiem zawsze[147] ma sens, a pytanie o zbieżność szeregu jest pytaniem o skończoność jego sumy.

Kryteria zbieżności szeregów (cz. I).

1. Warunek konieczny zbieżności.

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

Innymi słowy, jeżeli ciąg (a_n) jest rozbieżny lub zbieżny do granicy różnej od zera, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

2. Zbieżność szeregu nie zależy od pominięcia lub zmiany skończenie wielu początkowych wyrazów.

Oczywiście zmiana lub pominięcie tych wyrazów ma wpływ na sumę szeregu zbieżnego.

3. Kryterium porównawcze.

Niech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ będą szeregami o wyrazach nieujemnych, przy czym dla każdego $n\in\mathbb{N}$ zachodzi nierówność $a_n\leqslant b_n$.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=\infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\infty$.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n<\infty$, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n<\infty$.

4. Kilka wzorcowych szeregów.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ jest zbieżny dla $|q|<1$, rozbieżny dla pozostałych q.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^a}$ jest zbieżny dla $a>1$, rozbieżny dla pozostałych a.

---

[147] To znaczy "zawsze w przypadku szeregu o wyrazach nieujemnych". Jeśli szereg ma wyrazy różnych znaków, to jego suma może nie mieć sensu.

Przykład 67:
Rozstrzygnąć, czy szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{20}+n^8}-n^{10}\right)$$
jest zbieżny.

Rozwiązanie:
Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia (na różnicę kwadratów), a następnie wykonujemy szacowanie, aby skorzystać z kryterium porównawczego:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{20}+n^8}-n^{10}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^8}{\sqrt{n^{20}+n^8}+n^{10}}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^8}{\sqrt{n^{20}+0}+n^{10}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^8}{2n^{10}}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty\,.$$

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny.

Przykład 68:
Rozstrzygnąć, czy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{20}+n^9}-n^{10}\right)$ jest zbieżny.

Rozwiązanie:
Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia (na różnicę kwadratów), a następnie wykonujemy szacowanie, aby skorzystać z kryterium porównawczego:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^{20}+n^9}-n^{10}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^9}{\sqrt{n^{20}+n^9}+n^{10}}\geqslant$$
$$\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^9}{\sqrt{n^{20}+3n^{20}}+n^{10}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^9}{3n^{10}}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty\,.$$

Odpowiedź: Podany szereg jest rozbieżny.

Przykład 69:
Wskazując odpowiednią liczbę wymierną dodatnią C udowodnić nierówności
$$C\cdot\pi^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4n^4+4n+1}}{12n^4+n^3+3}\leqslant 2C\cdot\pi^2\,.$$
Wolno skorzystać bez dowodu z równości $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Rozwiązanie:
Szacujemy dany w zadaniu szereg od dołu:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4n^4+4n+1}}{12n^4+n^3+3}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4n^4+0+0}}{12n^4+n^4+3n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{16n^4}=\frac{1}{8}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{48}\cdot\pi^2$$
i od góry:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4n^4+4n+1}}{12n^4+n^3+3}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4n^4+4n^4+n^4}}{12n^4+0+0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{12n^4}=\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{24}\cdot\pi^2\,.$$

Wobec równości $\frac{1}{24}=2\cdot\frac{1}{48}$ udowodniliśmy żądane nierówności ze stałą $C=\frac{1}{48}$.

Szeregi liczbowe – kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego.

Za punkt wyjścia dalszych rozważań weźmy następujące szeregi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2020}}{2^n}, \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}, \qquad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{6^n} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{7^n}, \qquad (3 \text{ i } 4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}, \qquad (5 \text{ i } 6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{n^2}}. \qquad (7)$$

Przypomnę, że w przypadku szeregów na ogół nie mamy ambicji[148], aby wyliczyć sumę szeregu i w pełni zadowalamy się rozstrzygnięciem, czy szereg jest zbieżny. Jak dotąd jedynym pozważnym kryterium zbieżności, jakiem dysponujemy, jest kryterium porównawcze. Jest to bardzo subtelne kryterium wymagające subtelnych, choć na ogół nietrudnych oszacowań. Jest to nieocenione kryterium w przypadku szeregów, które są "na granicy" zbieżności, bo potrafi odróżnić szereg, który zachowuje się jak rozbieżny szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, od szeregu, który zachowuje się np. jak zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,000001}}$.

Szeregi, ktore wypisałem powyżej, nie mają w sobie nic z tego typu subtelności. Niektóre są zbieżne, a ich wyrazy bardzo szybko dążą do zera. Pozostałe są rozbieżne i to rozbieżne w sposób naprawdę spektakularny: ich wyrazy dążą do nieskończoności. W zasadzie ktoś mógłby powiedzieć: jeśli wyrazy szeregu dążą do nieskończoności, to jest on rozbieżny i po co nam inne kryteria. Cały problem polega na tym, że nie jesteśmy w stanie tego dążenia do nieskończoności łatwo zobaczyć. Powyższe szeregi mają wyrazy, które są ilorazami bardzo bardzo szybko rosnących wyrażeń. Wyrażenie z licznika jest na ogół zupełnie innego typu niż wyrażenie z mianownika. Trudno je sprawnie porównać, ale można założyć, że jeśli to są wyrażenia innego rodzaju, to jedno z nich rośnie o wiele szybciej od drugiego. Tylko które?

Wyobraź sobie na chwilę, że w powyższych siedmiu przykładach zamieniam $\sum_{n=1}^{\infty}$ na $\lim_{n\to\infty}$, czyli zamiast badania zbieżności szeregu oczekuję wyliczenia granicy (lub granicy niewłaściwej) ciągu wyrazów. I wyobraź sobie, że daję jeszcze dodatkową wskazówkę: każda z tych granic jest równa 0 albo $+\infty$. Czy jest Ci cokolwiek łatwiej? Raczej nie.

[148]Brak ambicji wynika po prostu z braku możliwości.

Rozstrzygnięcie zbieżności tych szeregów, czy też wyliczenie granic ciągów ich wyrazów, wymagałoby każdorazowo dość uciążliwych szacowań, jeśli chcielibyśmy rozwiązać te zagadnienia "gołymi rękami". Jest jednak wspaniała maszynka, która faktycznie łączy w sobie kryterium porównawcze z wiedzą o zbieżności/rozbieżności szeregów geometrycznych.

Wyobraźmy sobie najpierw, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem geometrycznym o dodatnim ilorazie różnym od 1. To, czy szereg ten jest zbieżny, czy rozbieżny zależy od porównania jego ilorazu z jedynką. Jeśli rozważymy ciąg ilorazów kolejnych wyrazów $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, to jest to ciąg stały, a jego wyrazy są równe ilorazowi rozważanego szeregu geometrycznego.

Niech teraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie trochę zaburzonym[149] szeregiem geometrycznym. Wówczas ciąg ilorazów kolejnych wyrazów $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zaburzonym ciągiem stałym. Jeśli tenże ciąg $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, powiedzmy do granicy $g\neq 1$, to dla dużych n mamy $\frac{a_{n+1}}{a_n}\approx g$, a więc możemy oczekiwać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zachowuje się podobnie[150] do szeregu geometrycznego o ilorazie g.

Bez wdawania się w szczegóły techniczne dowodu, sformułujmy uprawdopodobnione powyższym rozumowaniem kryterium d'Alemberta:

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach dodatnich[151] oraz istnieje granica[152]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=g<1\ ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=g>1\ ,$$

to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

[149]Mniejsza o to, co to dokładnie znaczy.

[150]Nieco precyzyjniej można powiedzieć, że przy dodatnim ε i dla odpowiednio dużych n mamy oszacowania $g-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<g+\varepsilon$, wobec czego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ szacuje się od dołu przez szereg geometryczny o ilorazie $g-\varepsilon$, a od góry przez szereg geometryczny o ilorazie $g+\varepsilon$. Wystarczy teraz wziąć tak małe ε, aby $g-\varepsilon<g+\varepsilon<1$ albo $g+\varepsilon>g-\varepsilon>1$. Wówczas wszystkie trzy szeregi geometryczne (o ilorazach $g-\varepsilon$, g, $g+\varepsilon$) są jednocześnie zbieżne albo jednocześnie rozbieżne.

[151]Kilka stron dalej jest sformułowanie bardziej ogólne, gdzie nie zakładamy dodatniości wyrazów, ale za to na ilorazy wyrazów nakładamy moduł. Ponieważ dziś rozważamy tylko szeregi o wyrazach nieujemnych, na razie się tym nie przejmujmy.

[152]W tym wypadku g może być równe 0, co faktycznie oznacza, że wyrazy szeregu dążą do zera szybciej niż wyrazy jakiegokolwiek szeregu geometrycznego.

Procedura stosowania kryterium d'Alemberta wygląda więc następująco. Mamy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, którego zbieżność chcemy zbadać. Póki co, załóżmy dla ustalenia uwagi, że ma on wyrazy **dodatnie**. Póki co załóżmy też, że na razie nie wchodzimy w niuanse, kiedy warto spróbować zastosować kryterium d'Alemberta – to wyczucie przychodzi z czasem[153].

Obliczamy granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$. Załóżmy, że się udało, co wymaga po pierwsze, żeby ta granica istniała, a po drugie, abyśmy byli w stanie przeprowadzić odpowiednie rachunki.

Jeżeli $g<1$, to szereg jest zbieżny.

Jeżeli $g>1$, to szereg jest rozbieżny.

Jeżeli natomiast $g=1$, to kryterium nie daje rozstrzygnięcia, więc przeprowadzone przez nas rachunki niczego nie dowiodły.

Zajmijmy się więc po kolei przytoczonymi wcześniej przykładami.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2020}}{2^n}\,. \qquad \mathbf{(1)}$$

Oznaczmy $a_n = \frac{n^{2020}}{2^n}$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{2020}\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n^{2020}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2020}}{2} = \frac{1}{2} \;\boldsymbol{<}\; \mathbf{1}\,,$$

skąd wynika, że szereg **(1)** jest zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}\,, \qquad \mathbf{(2)}$$

Oznaczmy $a_n = \frac{n!}{2^n}$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty \;\boldsymbol{>}\; \mathbf{1}\,,$$

skąd wynika, że szereg **(2)** jest rozbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{6^n} \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{3n}{n}}{7^n}\,. \qquad \mathbf{(3\ i\ 4)}$$

Na pierwszy rzut oka nie widać istotnej różnicy między tymi szeregami. Ale można zgadnąć odpowiedź używając trochę psychologii. Skoro zostały podane dwa podobne przykłady, to pewnie się inaczej zachowują, więc jeden jest zbieżny, a drugi rozbieżny. Ale który jest jaki? Zbieżny powinien być szereg o mniejszych wyrazach, czyli większych mianownikach, czyli szereg **(4)**.

[153]Pod warunkiem, że czas spędza się na rozwiązywaniu zadań. Sam upływ czasu niewiele tu pomoże.

A teraz na poważnie. Najpierw zastosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu **(3)**, a potem do **(4)**. Oznaczmy $a_n=\frac{\binom{3n}{n}}{6^n}$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{3n+3}{n+1}\cdot 6^n}{6^{n+1}\cdot\binom{3n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}{6\cdot(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}=\frac{9}{8}\ >\ \mathbf{1}\,,$$

skąd wynika, że szereg **(3)** jest rozbieżny.

Teraz oznaczmy $a_n=\frac{\binom{3n}{n}}{7^n}$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{3n+3}{n+1}\cdot 7^n}{7^{n+1}\cdot\binom{3n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}{7\cdot(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)}=\frac{27}{28}\ <\ \mathbf{1}\,,$$

skąd wynika, że szereg **(4)** jest zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}\qquad\text{oraz}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}\,. \tag{5 i 6}$$

Oznaczmy $a_n=\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 2^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}\ <\ \mathbf{1}\,,$$

skąd wynika, że szereg **(5)** jest zbieżny.

Analogicznie oznaczmy $a_n=\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 3^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}\ >\ \mathbf{1}\,,$$

skąd wynika, że szereg **(6)** jest rozbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^{n^2}}\,. \tag{7}$$

Niestety, tym razem próba zastosowania kryterium d'Alemberta prowadzi do koszmarnych rachunków. Jednak istnieje podobne w duchu kryterium, które akurat w tym wypadku bardzo nam się przyda. Jest to kryterium Cauchy'ego:

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach nieujemnych[154] oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g < 1\ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g > 1\ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Zastosujemy kryterium Cauchy'ego do szeregu **(7)**.

Oznaczmy $a_n = \frac{n^n}{2^{n^2}}$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = b_n \to ???\ .$$

Jeśli nie umiemy teraz sprawnie przejść do granicy, to możemy zastosować kryterium d'Alemberta (ew. Cauchy'ego) w wersji dla ciągów. Otóż jeśli kryterium orzeka o zbieżności szeregu, to jako efekt uboczny dostajemy zbieżność ciągu wyrazów tego szeregu do zera. Możemy w ogóle nie być zainteresowani szeregiem, a jedynie ciągiem jego wyrazów – wówczas tak samo stosujemy kryterium d'Alemberta, tylko wyciągamy konkluzję o zbieżności ciągu wyrazów do zera. Trzeba też wiedzieć, że jeśli kryterium d'Alemberta (ew. Cauchy'ego) orzeka o rozbieżności szeregu, to jest to rozbieżność spektakularna – wyrazy dążą do nieskończoności.

Wracając do badania zbieżności szeregu **(7)**, możemy zastosować kryterium d'Alemberta do **ciągu** (b_n):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n} = \frac{1}{2} \boldsymbol{<} \mathbf{1}\,,$$

skąd wynika, że ciąg (b_n) jest zbieżny do 0. A ponieważ $0<1$, to pozwala dokończyć stosowanie kryterium Cauchy'ego do szeregu **(7)**:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = b_n \to 0 \boldsymbol{<} \mathbf{1}$$

i wywnioskować, że szereg ten jest zbieżny.

Na razie tyle przykładów. Resztę biegłości nabędziesz rozwiązując zadania. Zapamiętaj jednak, że o wyborze między kryteriami d'Alemberta i Cauchy'ego decydują na ogół względy rachunkowe. Pierwiastek występujący w kryterium Caucy'ego na ogół utrudnia lub uniemożliwia rachunki, ale czasami bardzo je upraszcza. I jeszcze jedno: Jeśli uda się zastosować oba te kryteria, to dadzą one dokładnie tę samą granicę g. Jeśli więc kryterium d'Alemberta doprowadziło do $g=1$, to kryterium Cauchy'ego też nie da rozstrzygnięcia.

[154] W dalszej części wykładu jest sformułowanie bardziej ogólne, gdzie dopuszczamy wyrazy ujemne, ale nakładamy na nie moduł.

Kryteria zbieżności szeregów (cz. II).

5. Kryterium d'Alemberta.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=g<1\ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=g>1\ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

6. Kryterium Cauchy'ego.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=g<1\ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=g>1\ ,$$

to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

7. Kryterium d'Alemberta dla ciągów.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=g<1\ ,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=g>1\ ,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

8. Kryterium Cauchy'ego dla ciągów.

Jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=g<1$, to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica (może być niewłaściwa $+\infty$) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=g>1$, to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Szeregowe kryterium zbieżności całek. ALBO[155] Całkowe kryterium zbieżności szeregów.

Przypomnijmy wzorcowe całki niewłaściwe:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} \begin{cases} <+\infty & \text{(całka jest zbieżna)} \quad \text{dla} \quad p>1 \\ =+\infty & \text{(całka jest rozbieżna)} \quad \text{dla} \quad p\leqslant 1 \end{cases}$$

Oraz wzorcowe szeregi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} <+\infty & \text{(szereg jest zbieżny)} \quad \text{dla} \quad p>1 \\ =+\infty & \text{(szereg jest rozbieżny)} \quad \text{dla} \quad p\leqslant 1 \end{cases}$$

Patrząc na powyższe przykłady nie sposób nie zadać sobie następującego pytania. Co prawda ciąg i funkcja określona na przedziale $[1,+\infty)$ to dwa bardzo różne obiekty matematyczne, ale często są one definiowane bardzo podobnymi wzorkami[156]. Czy w świetle powyższych przykładów powinniśmy oczekiwać, że zbieżność szeregu będzie równoważna zbieżności odpowiadającej mu całki niewłaściwej?

Raczej nie należy oczekiwać, że będzie aż tak dobrze bez jakichkolwiek założeń. Poza tym z funkcji f można zawsze zrobić odpowiadający jej ciąg (a_n) przyjmując $a_n=f(n)$, ale w drugą stronę to już może być gorzej. Bo tak jak z ciągiem określonym wzorem

$$a_n=\frac{7n^8+n^3+\sqrt{n}}{n^9+2^n}$$

bez namysłu skojarzymy funkcję

$$f(x)=\frac{7x^8+x^3+\sqrt{x}}{x^9+2^x},$$

tak we wzorach definiujących ciągi

$$a_n=(-1)^n \qquad \text{oraz} \qquad b_n=\frac{1}{p_n} \quad {}^{157}$$

trudno byłoby zamiast n wstawić x i pozwalać temu x-owi przyjmować dowolne wartości rzeczywiste większe od 1. Bo nie ma sensu wyrażenie[158] $(-1)^{\sqrt{2}}$, ani mówienie o π-tej liczbie pierwszej[159].

Pytamy więc, przy jakich sensownych założeniach o funkcji $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ mamy gwarancję równoważności zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \qquad \text{oraz całki niewłaściwej} \qquad \int_1^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

---

[155] Niepotrzebne skreślić.

[156] Dokładniej: chodzi o wzorek na wyraz ogólny ciągu (zwykle wyrażenie zależne od n) oraz wzorek definiujący funkcję (zwykle wzorek zależny od x). Wzorki te mogą się różnić tylko tym, że literka n została zamieniona na literkę x.

[157] Przez p_n oznaczamy n-tą liczbę pierwszą, np. $p_1=2$, $p_2=3$, $p_{12}=37$, $p_{21}=73$, $p_{25}=97$.

[158] Przynajmniej w zakresie liczb rzeczywistych.

[159] Chyba że jakiś producent wprowadzi na rynek napój o nazwie "Liczba pierwsza".

Okazuje się, że takie założenia są dwa:
- funkcja f powinna przyjmować tylko wartości dodatnie[160],
- funkcja f powinna być nierosnąca.

Mamy więc następujace kryterium:

Niech $f:[1,+\infty)\to(0,\infty)$ będzie funkcją[161] nierosnącą. Wówczas szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$
jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka niewłaściwa
$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx\,.$$
Ponieważ w przypadku całki niewłaściwej z funkcji nieujemnej czy szeregu o wyrazach nieujemnych, zbieżność i rozbieżność można wyrazić przyrównując całkę czy sumę szeregu do nieskończoności[162], tezę powyższego kryterium możemy zapisać symbolicznie tak:
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \,<\, \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \,<\, \infty\,.$$

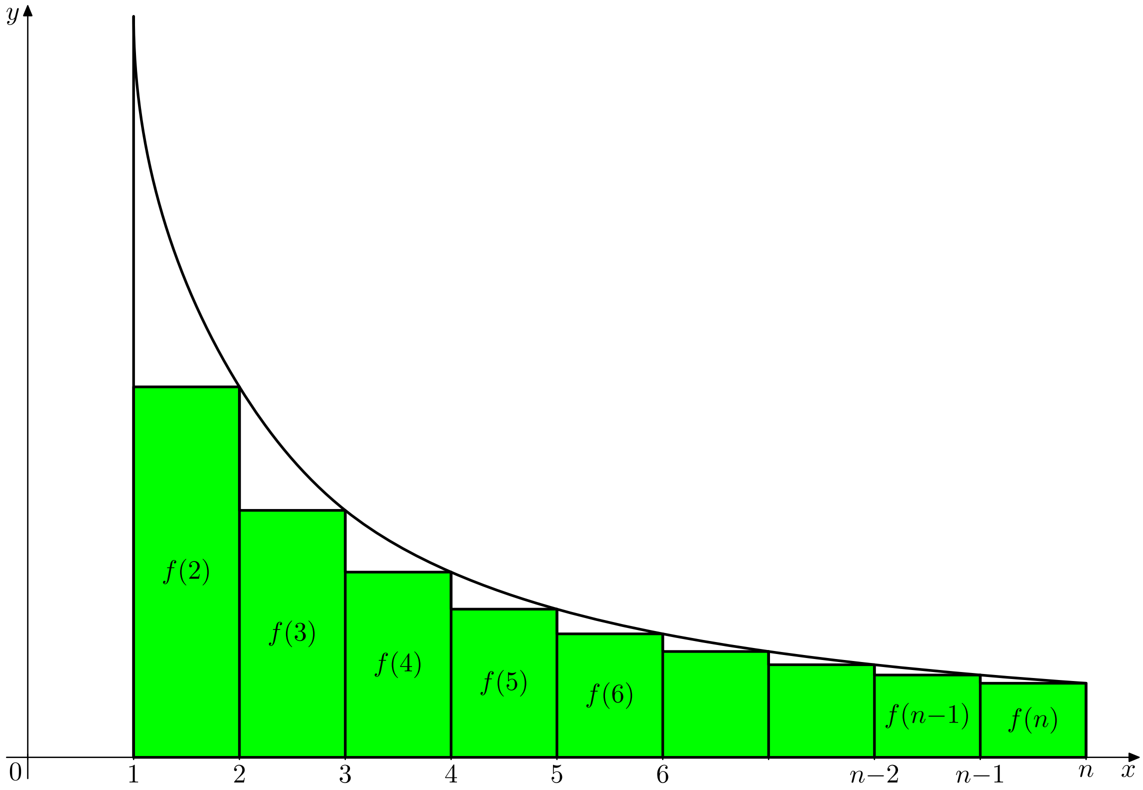
Ideę dowodu powyższego kryterium można prześledzić na rysunkach 51 i 52.

Z rysunków tych wynikają nierówności
$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leqslant \int_1^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\,,$$
co jest równoważne nierównościom
$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leqslant \int_1^{\infty} f(x)\,dx+f(1)\,.$$
Z powyższych nierówności wynika, że albo i całka i suma szeregu są skończone, albo i jedno i drugie jest nieskończone.

[160] Na siłę można byłoby napisać "nieujemne", ale wobec monotoniczności osiąganie wartości 0 wymuszałoby zerowanie się funkcji dla wszystkich odpowiednio dużych argumentów. W konsekwencji odpowiadający jej szereg liczbowy miałby od pewnego miejsca tylko wyrazy zerowe. Zbieżność zarówno całki jak i szeregu byłaby w tym wypadku zbyt oczywista, aby była ciekawa.

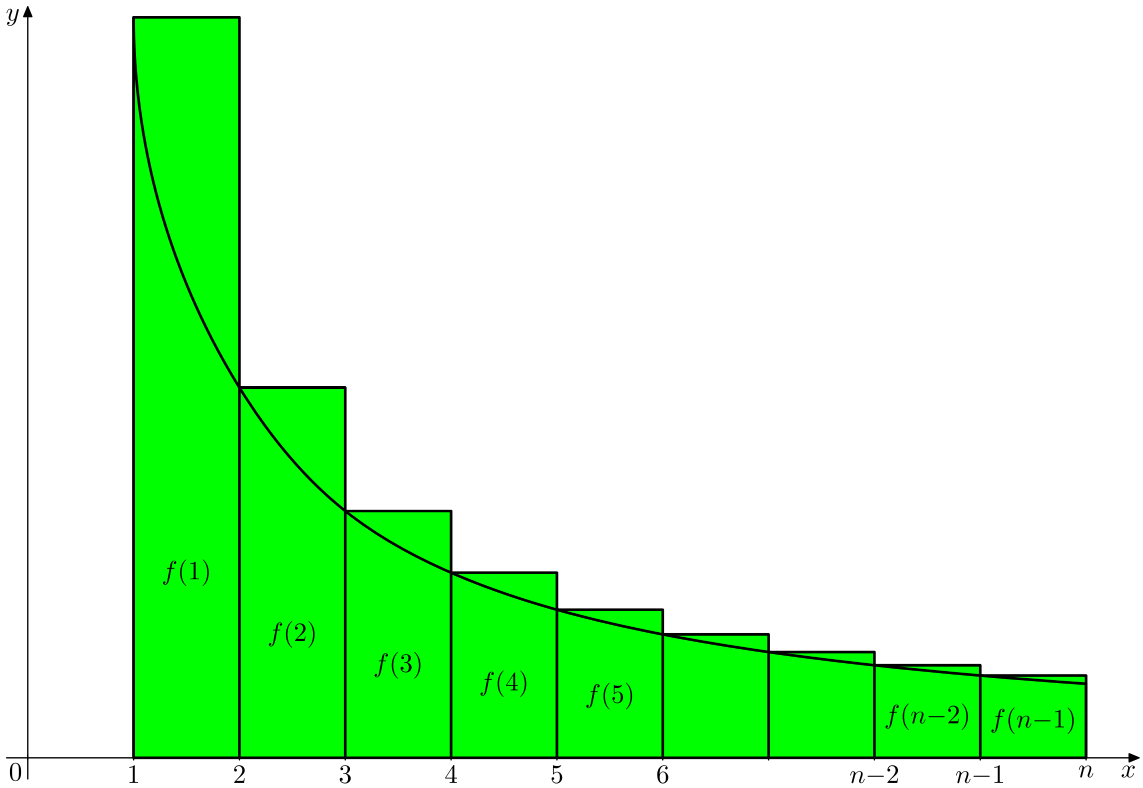
[161] O dziwo nie założyłem, że f jest ciągła. Bez żadnej szkody możemy sobie to założenie dopisać. Okazuje się jednak, że w przypadku funkcji monotonicznej ewentualne nieciągłości nie zaburzają całkowalności. Jednak wchodzenie w tym momencie w szczegóły wykracza poza zakres wykładu. Innym warunkiem, który mógłby się tu pojawić jest założenie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. To założenie nie jest do niczego potrzebne, ale jeśli nie jest ono spełnione, to zarówno całka jak i szereg są rozbieżne, więc niczego specjalnie ciekawego nie uzyskujemy. Założenie to może jednak spełniać rolę zwrócenia uwagi na interesujący przypadek i dlatego nie wykluczyłbym, że się gdzieś tam w literaturze pojawia.

[162] Albowiem pytanie o zbieżność jest pytaniem o skończoność geometrycznego pola pod wykresem funkcji czy też o skończoność sumy wyrazów szeregu.



y
x
0
1
2
3
4
5
6
n−2
n−1
n
f(2)
f(3)
f(4)
f(5)
f(6)
f(n−1)
f(n)

rys. 51



y
x
0
1
2
3
4
5
6
n−2
n−1
n
f(1)
f(2)
f(3)
f(4)
f(5)
f(n−2)
f(n−1)

rys. 52

Kryterium to nosi nazwę (a jednak) **całkowego krytrium zbieżności szeregów**, a nie *szeregowego kryterium zbieżności całek.* Powód tego jest następujący: Na ogół łatwiej obliczyć wartość całki niż sumę szeregu, czy choćby sumę częściową, Dlatego w typowej sytuacji stosowalności tego kryterium, jesteśmy w stanie stosunkowo łatwo obliczyć całkę, a w przypadku szeregu napotykamy na trudności nie tylko z obliczeniem sumy, ale wręcz z rozstrzygnięciem zbieżności.

W tym miejscu należy po raz kolejny przypomnieć, że zbieżność szeregu nie zależy od zmiany dolnej granicy sumowania, a zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_{?}^{\infty} f(x)\,dx$ nie zależy[163] od zmiany dolnej granicy całkowania.

Skoro szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ i całka $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ wykazują tyle podobieństw, to nasuwa się pytanie, czy można też przenieść inne kryteria zbieżności szeregów na kryteria zbieżności całek niewłaściwych. Pierwsze kryterium, które przychodzi tu na myśl, to warunek konieczny zbieżności szeregów:

Jeżeli $a_n \not\to 0$, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Naturalne byłoby oczekiwać, że:

Jeżeli $f(x) \not\to 0$ przy $x \to \infty$, to całka $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx$ jest rozbieżna.

O dziwo, takie kryterium nie jest prawdziwe !!!

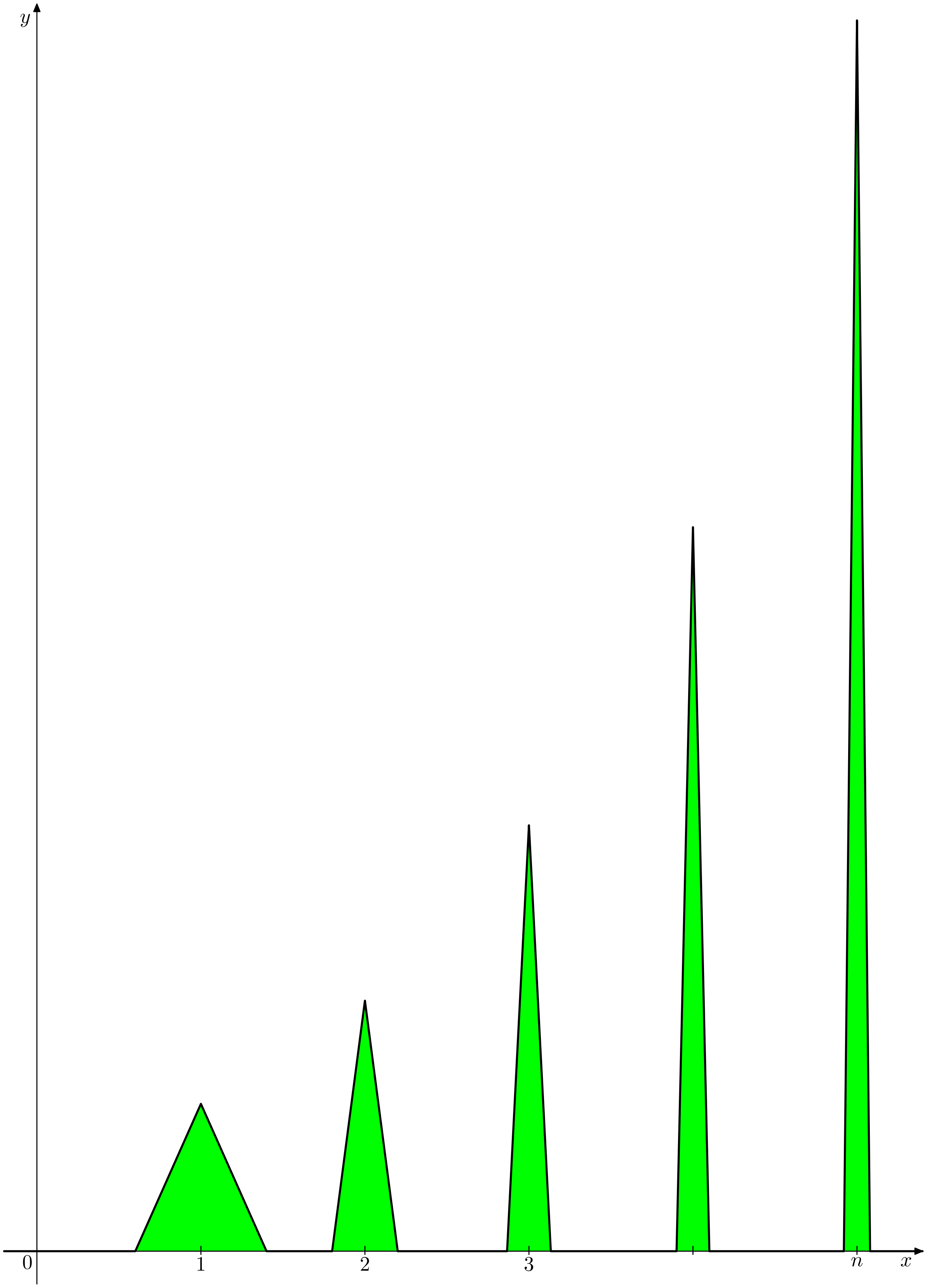
Przykład funkcji, dla której takie "kryterium" nie jest prawdziwe, widzimy na rysunku 53. Funkcja ta jest zerowa poza otoczeniami liczb naturalnych, gdzie jej wykres stanowią wąskie i wysokie trójkąty równoramienne. Można by ją oczywiście zapisać wzorem, z którego niewiele byłoby widać, więc poprzestańmy na rysunku z dodatkowym doprecyzowaniem, że trójkąt w okolicy liczby n ma podstawę długości $2/4^n$ oraz wysokość 2^n. To daje pole n-tego zielonego trójkąta równe $1/2^n$, wobec czego[164]

$$\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\,.$$

Oczywiście granica $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ nie istnieje, a co więcej funkcja f jest nieograniczona, gdyż w miarę posuwania się do $+\infty$ zdarza jej się przyjmować dowolnie duże wartości.

[163] Przy założeniu ciągłości funkcji f na przedziale domkniętym obejmującym wszystkie potencjalne dolne granice całkowania.

[164] Zauważmy, że do całki wchodzi tylko połowa pola pierwszego trójkąta.



rys. 53

Jednocześnie ten przykład pokazuje, że w kryterium całkowym zbieżności szeregów założenie monotoniczności jest bardzo istotne. W tym przypadku całka $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna, a odpowiadający jej szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$$

jest rozbieżny i to w sposób spektakularny, bo jego wyrazy dążą do nieskończoności.

Na koniec jeszcze kilka komentarzy.

Kryterium całkowe ma szansę działać tylko dlatego, że dzięki monotoniczności funkcji podcałkowej znajomość jej wartości w punktach całkowitych pozwala nam z grubsza przewidzieć, co funkcja robi pomiędzy punktami całkowitymi. Bez monotoniczności znajomość wartości w punktach całkowitych nie pozwala przewidzieć, co się dzieje poza nimi, co jest świetnie widoczne na rysunku 53.

W związku z przykładem z rysunku 53 powstaje pytanie dlaczego[165] w szeregu zbieżnym wyrazy dążą do zera, a w zbieżnej całce niewłaściwej funkcja podcałkowa nie musi dążyć do zera w nieskończoności.

Otóż w szeregu rozmiar wyrazu odpowiada przyczynkowi tego wyrazu do zmiany sumy częściowej. Jeśli wyraz jest duży, to pociąga za sobą dużą zmianę sumy częściowej. W szeregu zbieżnym sumy częściowe się stabilizują – dalekie sumy częściowe zmieniają o bardzo mało, co wyklucza dalekie duże wyrazy.

Zupełnie inaczej jest z całką. Duża wartość funkcji[166] nie musi pociągać za sobą dużego przyczynku do całki, bo ta nawet kolosalna wartość może być przyjmowana na malusieńkim przedzialiku. W szeregu natomiast nie można dodać pół czy ćwierć czy miliardową część wyrazu. Dodajemy od razu cały wyraz – jak jest duży, to dodajemy dużo.

Gdyby jednak założyć, że f ma w nieskończoności granicę i ta granica jest różna od zera[167], to całka $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ musiałaby być rozbieżna.

[165] Słowo "dlaczego" nie pyta tu o formalny dowód, ale o istotę przyczyn, dla których mamy takie, a nie inne zjawiska.

[166] Myślmy o funkcji ciągłej, a więc duża wartość w jednym punkcie wymusza duże wartości w pewnym (być może bardzo małym) otoczeniu tego punktu.

[167] Mogłaby to też być granica niewłaściwa $\pm\infty$.