Całki niewłaściwe

Ile jest równe pole kwadratu o boku 1? Chyba to nie jest wystarczająco poważne pytanie. To może to pole kwadratu obliczmy przy użyciu całki. Powiedzmy z funkcji stałej równej 1 na przedziale [0, 1], czyli

$$\int_0^1 1\,dx\,.$$

Nadal mało poważne? No to może wykonajmy jakieś podstawienie, na przykład $x=\sqrt{t}$, co da formalny wzór $dx=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$. Otrzymujemy całkę[130]

$$\int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}}=\sqrt{t}\,\Big|_{t=0}^{1}=\sqrt{1}-\sqrt{0}=1\,.$$

Wyszło, że pole kwadratu jest równe 1. Uffff... Zgadza się. Jest dobrze.

To wobec tego dwa pytania:

1° Skoro to jest dobrze, to dlaczego to jest źle?

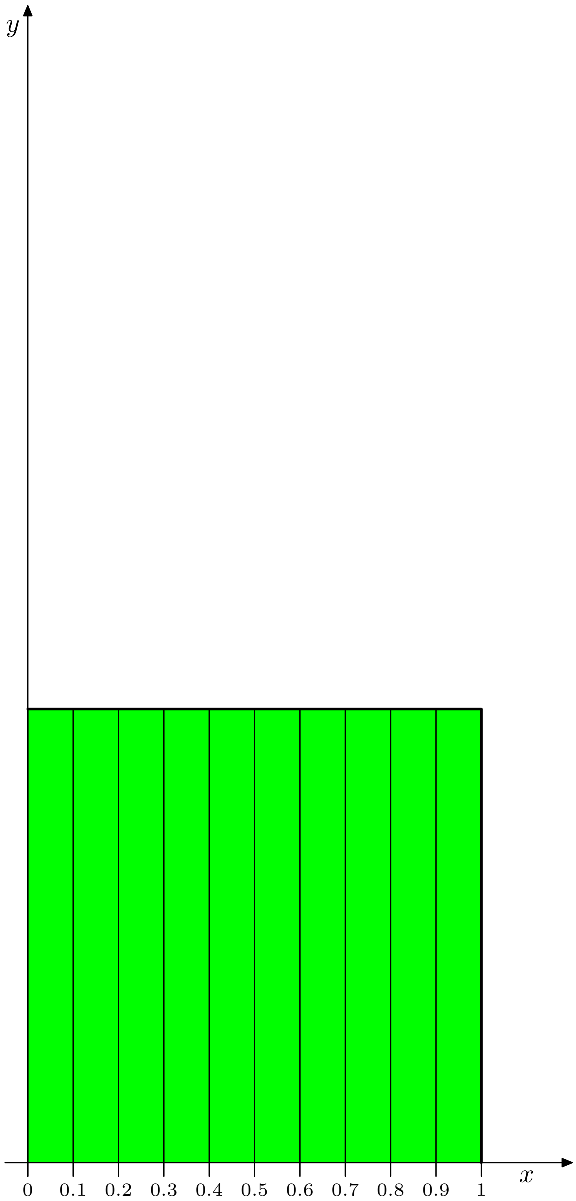
2° Skoro to jest źle, to dlaczego jednak jest dobrze?

Bardzo fajnie się bezmyślnie liczyło całkę $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, ale zgodnie z naszymi dotychczasowymi umowami, ta całka nie ma sensu. Umówiliśmy się bowiem, że całkujemy tylko funkcje ograniczone, gdyż tylko takie funkcje prowadzą do figur ograniczonych.

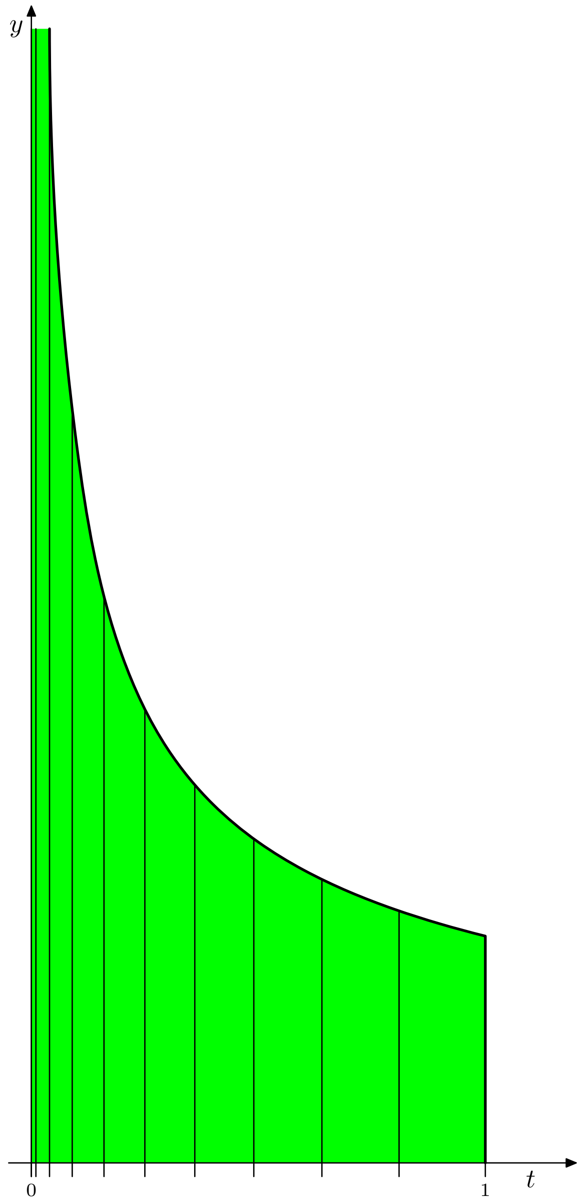
[130] Pamiętałem o zmianie granic całkowania. Naprawdę !!!

Tymczasem podstawienie, które wykonaliśmy, dosyć mocno zdeformowało kwadratowy obszar pod wykresem funkcji (rys. 45). Z prawej strony kwadrat był rozciągany w poziomie, więc dla zachowania pola zapadł się w pionie – przy prawym brzegu prawie dwukrotnie. Z kolei blisko lewego brzegu deformacja w poziomie powodowała niemiłosierne ściskanie obszaru, przez co dla zachowania pola wypiętrzył się on do nieskończoności (rys. 46). W zasadzie wydaje się, że przy tej deformacji pole powinno się zachować[131], ale czym jest pole nieograniczonej figury, takiej jak na rysunku 46?

Przy definicji pola umieszczaliśmy figury w wielokątach, a figury nieograniczonej nie da się w umieścić wielokącie[132].



rys. 45



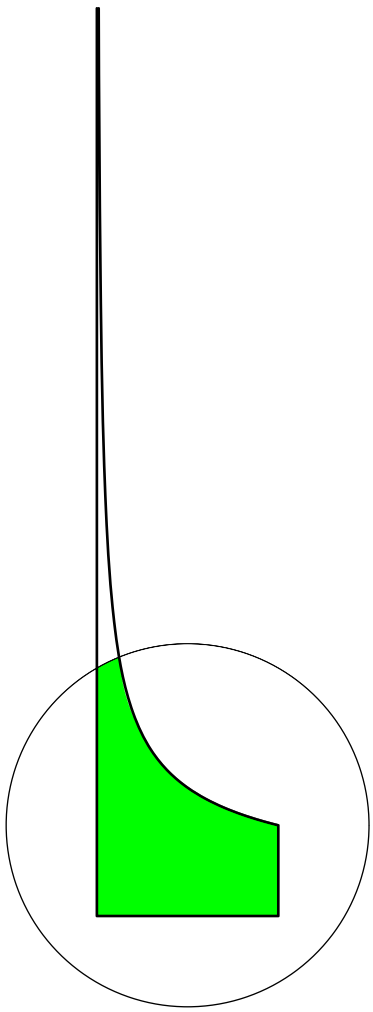
rys. 46

[131]Pionowe kreski powinny ułatwić prześledzenie jak jest deformowany kwadrat.

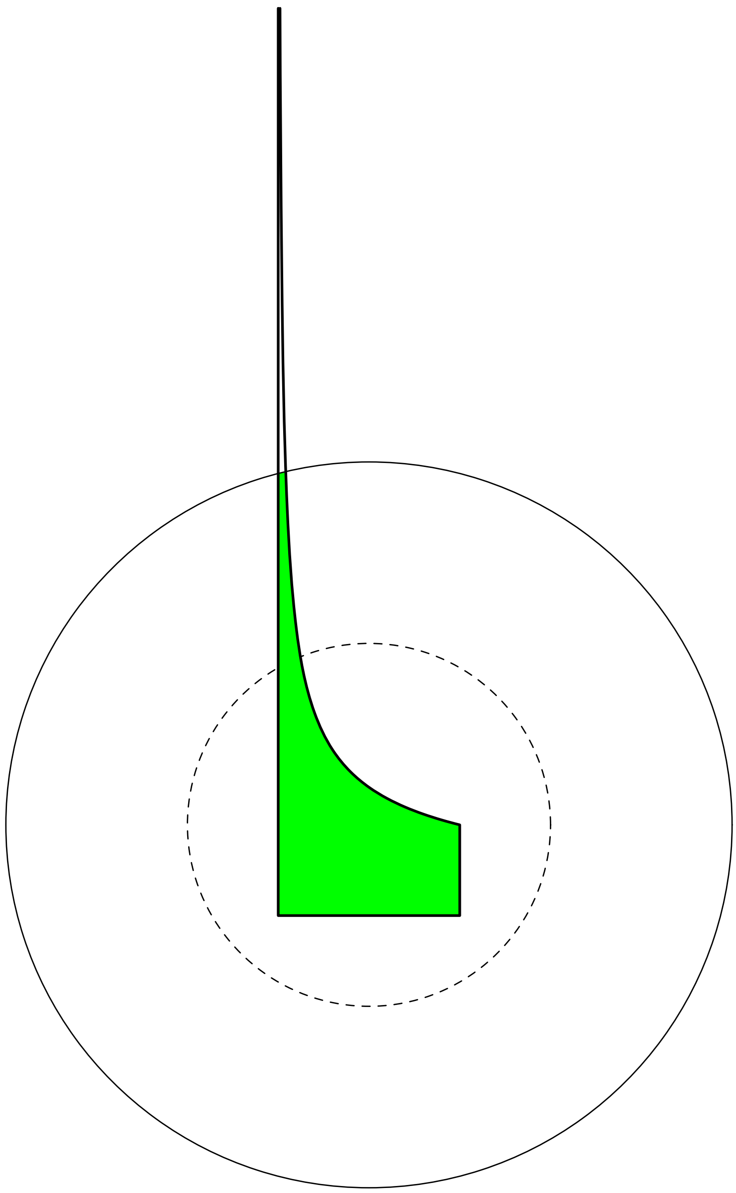
[132]Kto by pomyślał, że prościutkie podstawienie w prościutkiej całce doprowadzi do takich kłopotów...

Otóż pole figury nieograniczonej definiuje się następująco:
Obcinamy figurę do coraz większych kół[133] (rys. 47 i 48). Jeżeli te przekroje mają pola[134], to jest sens mówić o polu figury i jest ono granicą[135] pól przekrojów figury z kołami o ustalonym środku i promieniu dążącym do nieskończoności.

Jest w sumie obojętne, czy będziemy rozważać przecięcia figury z kołami, czy z siedemnastokątami foremnymi, czy też będziemy ją okrawać w inny sposób, byle odpowiedni[136].



rys. 47



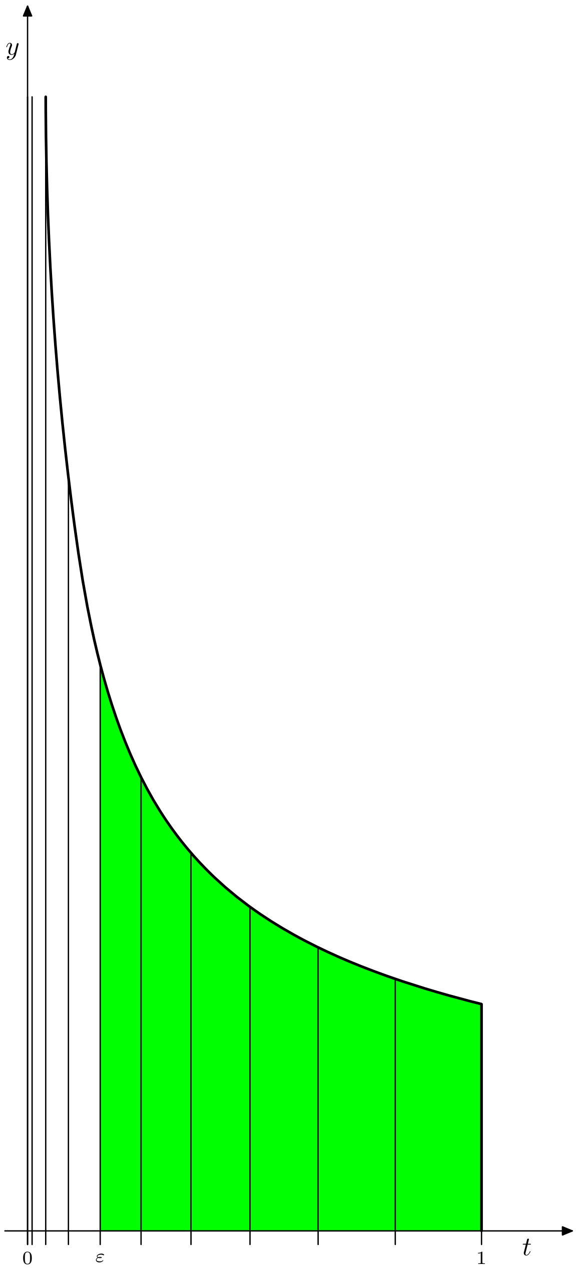
rys. 48

[133]A dokładniej: rozważamy przekroje figury z tymi kołami.
[134]Czyli są mierzalne.
[135]Może to być granica niewłaściwa $+\infty$. Wówczas powiemy, że figura ma nieskończone pole.
[136]Nie będę przecyzował, co słowo "odpowiedni" tu znaczy.

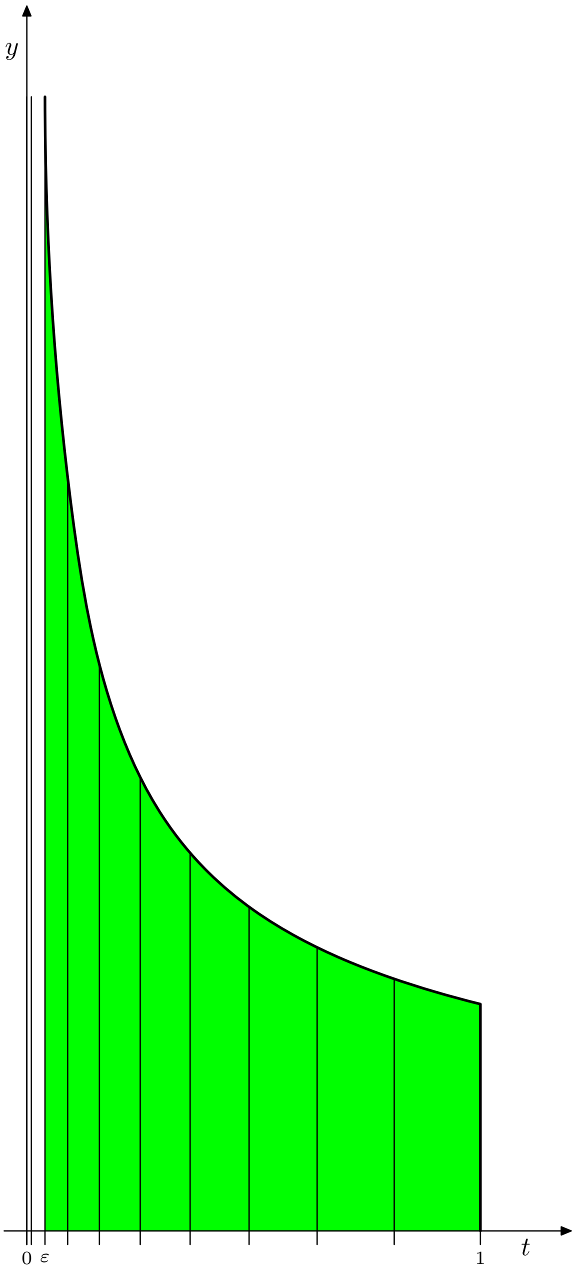
Pozbądźmy się wypiętrzenia obszaru koło zera poprzez odcięcie wąziutkiego pionowego paska[137] przy lewym brzegu (rys. 49 i 50). Jeśli pasek ten ma szerokość ε, to pole okrojonego obszaru jest równe

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t}\,\Big|_{t=\varepsilon}^{1} = 1 - \sqrt{\varepsilon}\,,$$

co dąży do 1 przy $\varepsilon \to 0$.



rys. 49



rys. 50

[137]Może wyglądać dziwnie, że akurat tak okrawamy obszar, ale zależy nam na tym, aby pole okrojonego obszaru dało się liczyć przy pomocy całki.

To był wstęp do pojęcia całki niewłaściwej. Czym właściwie jest całka niewłaściwa, opowiem Wam za chwilę.

A na razie powinniście zapamiętać tyle:

Można myśleć o całce

$$\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

gdzie $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła[138]. Funkcja f może mieć w pobliżu a jakąś osobliwość, na przykład może dążyć do nieskończoności albo szaleńczo oscylować. Na pewno istnieją całki

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx\,,$$

gdzie ε jest dodatnie i nie za duże[139]. Wówczas definiujemy

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx\,.$$

Oczywiście, jak to z granicą bywa, może istnieć albo nie.

• Jeśli ta granica istnieje i jest liczbą skończoną, to powiemy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)\,dx$ jest zbieżna i przypiszemy jej otrzymaną wartość liczbową.

• Jeśli ta granica istnieje jako granica niewłaściwa $+\infty$ albo $-\infty$, to powiemy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)\,dx$ jest **ro**zbieżna i przypiszemy jej otrzymaną wartość $\pm\infty$.

• Jeśli ta granica nie istnieje nawet jako granica niewłaściwa, to powiemy, że całka niewłaściwa $\int_a^b f(x)\,dx$ jest **ro**zbieżna i nie przypiszemy jej żadnej wartości.

Nie trzeba się bawić ze zmianą granicy całkowania. Rozważaną przez nas całkę niewłaściwą można obliczać tak:

$$\int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}}=\sqrt{t}\,\Big|_{t=0}^{1}=\sqrt{1}-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sqrt{\varepsilon}=1-0=1\,.$$

Pamiętajmy, że całka ma osobliwość w dolnej granicy całkowania. Licząc przyrost funkcji pierwotnej, możemy napisać w dolnej granicy $t=0$, ale w kontekście osobliwości funkcji podcałkowej nie oznacza to podstawienia $t=0$ do funkcji pierwotnej, ale wzięcie prawostronnej granicy funkcji pierwotnej w zerze.

[138] Uwaga: przedział otwarty z lewej strony.
[139] Bo nie chcemy, aby $a+\varepsilon>b$.

Po tym wstępie czas na nieco dokładniejsze wyjaśnienie, czym są całki niewłaściwe i jak się je oblicza. Na razie zajmiemy się przypadkiem, gdy funkcja podcałkowa jest ciągła wewnątrz przedziału całkowania.

W tej chwili nie będziemy się jeszcze zajmować badaniem zbieżności całek niewłaściwych w oparciu o inne kryteria niż bezpośrednie usiłowanie wyliczenia wartości.

Całką niewłaściwą jest całka

$$\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

gdzie funkcja f jest ciągła na przedziale (a,b), ale sama całka w co najmniej jednym końcu przedziału całkowania ma osobliwość. Osobliwość całki może być osobliwością funkcji f, ale może też być związana z przedziałem całkowania, gdyż dopuszczamy $a=-\infty$ oraz $b=+\infty$.

Jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f, to[140]

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{b} = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)\,.$$

Przy tym całka jest rozbieżna, jeśli co najmniej jedna z powyższych granic nie istnieje[141].

A teraz kilka przykładów.

Przykład 59:

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonujemy całkowanie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi\,.$$

Przykład 60:

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $t=\sqrt{x}$, czyli $x=t^2$ przy założeniu $t\geqslant 0$, skąd dostajemy formalny wzór $dx=2t\,dt$. Przy tym podstawieniu przedziałowi całkowania $x\in(0,\infty)$ odpowiada przedział $t\in(0,\infty)$.

---

[140] W przypadku, gdy $a=-\infty$ lub $b=+\infty$ nie piszemy znaków granic jednostronnych. A ponadto w przypadku $a=-\infty$ możemy dolną granicę przyrostu zapisać jako $-\infty$, jeśli razi nas $x=-\infty$.

[141] To znaczy, że nie jest liczbą skończoną.

Otrzymujemy:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}} = \int_0^\infty \frac{2t\,dt}{t+t^3} = 2\cdot\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = 2\cdot \operatorname{arctg} t \Big|_{t=0}^{\infty} =$$

$$= 2\cdot\left(\lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} t\right) - 2\cdot \operatorname{arctg} 0 = 2\cdot\frac{\pi}{2} - 0 = \pi\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość π.

Przykład 61:

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{x^2-1}$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}\,,$$

$$1 = A\cdot(x+1) + B\cdot(x-1)\,,$$

$$1 = Ax + A + Bx - B\,,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+B \\ 1 &= A-B \end{cases}$$

Bez trudu otrzymujemy $A=1/2$ i $B=-1/2$.

Wobec tego

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x^2-1} = \int_3^\infty \frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int_3^\infty \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\,dx = \frac{\ln|x-1|}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2}\Bigg|_{x=3}^{\infty} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln|x-1|}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2}\right)\right) - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 4}{2} = \left(\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{-\ln 2 + 2\cdot\ln 2}{2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot\ln\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\ln 1 + \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 2}{2}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 2}{2}$.

Uwaga: Całki

$$\int_3^\infty \frac{1}{x-1}\,dx, \qquad \int_3^\infty \frac{1}{x+1}\,dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln|x-1|}{2}, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln|x+1|}{2}$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty-\infty$.

Odpowiednie poradzenie sobie z przejściem granicznym jest kluczową częścią zadania. Bez tego elementu, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, zadanie nie może zostać uznane za rozwiązane.

Przykład 62:

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{x}{x^4-1}\,dx$ lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{x}{x^4-1} = \frac{x}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\,,$$

$$x = A\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+1\right) + B\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+1\right) + (Cx+D)\cdot\left(x^2-1\right)\,,$$

$$x = Ax^3 + Ax^2 + Ax + A + Bx^3 - Bx^2 + Bx - B + Cx^3 - Cx + Dx^2 - D\,,$$

$$\begin{cases} 0 = A+B+C \\ 0 = A-B+D \\ 1 = A+B-C \\ 0 = A-B-D \end{cases}$$

Konfrontacja równań drugiego i czwartego daje $D=0$, natomiast odjęcie stronami równań pierwszego i trzeciego prowadzi do $C=-1/2$. Uwzględnienie tych wartości pozostawia równania

$$\begin{cases} 1/2 = A+B \\ 0 = A-B \end{cases}$$

Stąd łatwo otrzymujemy $A=B=1/4$.

Wobec tego

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{x}{x^4-1}\,dx = \int\limits_{2}^{\infty} \frac{1/4}{x-1} + \frac{1/4}{x+1} - \frac{x/2}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{\ln|x+1|}{4} - \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{4}\Bigg|_{x=2}^{\infty} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln|x-1|}{4} + \frac{\ln|x+1|}{4} - \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{4}\right)\right) - \frac{\ln 1}{4} - \frac{\ln 3}{4} + \frac{\ln 5}{4} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to\infty}\ln\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x^2+1}\right) + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\cdot\ln\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x^2+1}\right) + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} = \frac{1}{4}\cdot\ln 1 + \frac{\ln 5 - \ln 3}{4} = \frac{\ln 5 - \ln 3}{4}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 5 - \ln 3}{4}$.

Uwaga: Całki

$$\int_2^\infty \frac{1}{x-1}\,dx, \qquad \int_2^\infty \frac{1}{x+1}\,dx, \qquad \int_2^\infty \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln|x-1|}{4}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln|x+1|}{4}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{4}$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty-\infty$.

Odpowiednie poradzenie sobie z przejściem granicznym jest kluczową częścią zadania. Bez tego elementu, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, zadanie nie może zostać uznane za rozwiązane.

Uwaga 2: Prostsze rachunki otrzymamy wykonując podstawienie $t=x^2$.

Przykład 63:

Obliczyć wartość całki niewłaściwej $\int_2^\infty \frac{x-5}{x^3-x}\,dx$ i po uproszczeniu wyniku określić, czy wartość ta jest większa czy mniejsza od 0.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że

$$x^3-x=(x-1)\cdot x\cdot(x+1)\,.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{x-5}{(x-1)\cdot x\cdot(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}\,,$$

$$x-5=A\cdot x\cdot(x+1)+B\cdot(x-1)\cdot(x+1)+C\cdot(x-1)\cdot x\,.$$

W tym momencie można wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B i C, porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

My jednak podstawimy za x wartości 0, 1 i -1 otrzymując odpowiednio

dla $x=1$ $\quad -4=2A,\quad$ skąd $\quad A=-2,$

dla $x=0$ $\quad -5=-B,\quad$ skąd $\quad B=5,$

dla $x=-1$ $\quad -6=2C,\quad$ skąd $\quad C=-3.$

Wobec tego

$$\int_2^\infty \frac{x-5}{x^3-x}\,dx=\int_2^\infty -\frac{2}{x-1}+\frac{5}{x}-\frac{3}{x+1}\,dx=-2\cdot\ln|x-1|+5\cdot\ln|x|-3\cdot\ln|x+1|\Big|_{x=2}^{\infty}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(-2\cdot\ln|x-1|+5\cdot\ln|x|-3\cdot\ln|x+1|\right)\right)+2\cdot\ln1-5\cdot\ln2+3\cdot\ln3=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^5}{(x-1)^2\cdot(x+1)^3}\right)+\ln\frac{27}{32}=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{(x-1)^2\cdot(x+1)^3}\right)+\ln\frac{27}{32}=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}\right)+\ln\frac{27}{32}=\ln 1+\ln\frac{27}{32}=\ln\frac{27}{32}<\ln 1=0\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\ln\frac{27}{32}<0$.

Uwaga: Całki $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x-1}\,dx$, $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x}\,dx$, $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x+1}\,dx$ są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x\to\infty}\ln|x-1|,\qquad \lim_{x\to\infty}\ln|x|,\qquad \lim_{x\to\infty}\ln|x+1|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty-\infty$.

Całki niewłaściwe – badanie zbieżności

A teraz zajmiemy się badaniem zbieżności całek niewłaściwych, w których funkcja podcałkowa jest nieujemna. Taka całka jest geometrycznym polem pewnej figury, na ogół nieograniczonej. Zbieżność takiej całki jest równoznaczna ze skończonością takiego pola. A sama całka zawsze albo ma wartość skończoną, albo jest rozbieżna do $+\infty$.

Do tego celu posłużą nam dwa elementy:
- kryterium porównawcze,
- rodzina całek o znanej zbieżności, do której będziemy porównywać[142] badaną całkę.

Najpierw kryterium porównawcze. Nie mówi ono nic więcej niż to, że większe od dużego jest duże, a mniejsze od małego jest małe.

A konkretnie: załóżmy, że $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$, funkcje $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ są ciągłe, a ponadto dla każdego $x\in(a,\,b)$ zachodzą nierówności

$$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)\,.$$

Jeżeli całka $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ jest rozbieżna, to całka $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ też jest rozbieżna.

Jeżeli całka $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ jest zbieżna, to całka $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ też jest zbieżna.

Obie powyższe implikacje są równoważne[143], więc po co dwa razy powtarzać to samo? Po prostu wygodnie jest pamiętać obydwie wersje i korzystać z tej, która jest nam aktualnie potrzebna.

Dla całek niewłaściwych o nieujemnej funkcji podcałkowej nie musimy słowami wypowiadać faktu ich zbieżności bądź rozbieżności. Wystarczy napisać całkę oraz ∞ i postawić między nimi znak równości lub ostrą nierówność.

[142] Przez odpowiednie szacowanie.
[143] Każda jest transpozycją drugiej.

W praktyce stosowanie kryterium porównawczego sprowadza się do szacowań, które zapisujemy w ciągu nierówności tak:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \ldots \text{ tu lecą jakieś szacowania } \ldots \leqslant \int_a^b g(x)\,dx < \infty$$ [144]

albo tak:

$$\int_a^b g(x)\,dx \geqslant \ldots \text{ tu lecą jakieś szacowania } \ldots \geqslant \int_a^b f(x)\,dx = \infty\,.$$ [145]

Do tego wszystkiego potrzebujemy wzorcowych całek, których zbieżność sobie raz rozstrzygniemy bezpośrednim całkowaniem, i do których będziemy porównywać inne całki.

Nie będę się silił na wielkie ogólności, z których niewiele wynika. Dlatego przedstawiona rodzina całek będzie możliwie prosta, ale wystarczająca, aby zaobserwować najciekawsze zjawiska.

Oto nasze wzorce:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \qquad \text{oraz} \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x^p}\,.$$

Wyliczamy bezpośrednio[146]

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \int_0^1 x^{-p}\,dx = \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_{x=0}^{1} = \frac{1}{1-p} - \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1-p}}{1-p} = \begin{cases} 1/(1-p) & \text{dla} \quad p<1 \\ +\infty & \text{dla} \quad p>1 \end{cases}$$

Natomiast dla $p=1$ otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{x=0}^{1} = -\lim_{x\to 0^+} \ln x = +\infty\,.$$

Wniosek: Całka $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ jest zbieżna dla $p<1$ i rozbieżna dla $p\geqslant 1$.

[144]I formułujemy wniosek: całka $\int_a^b f(x)\,dx$ jest zbieżna.

[145]I formułujemy wniosek: całka $\int_a^b g(x)\,dx$ jest rozbieżna.

[146]Przy założeniu $p\neq 1$.

Podobnie postępujemy z druga całką:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \int_1^\infty x^{-p}\,dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_{x=1}^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \begin{cases} -1/(1-p) & \text{dla} \quad p>1 \\ +\infty & \text{dla} \quad p<1 \end{cases}$$

Dla $p=1$ otrzymujemy

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \ln x\Bigg|_{x=1}^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\ln x = +\infty\,.$$

Wniosek: Całka $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ jest zbieżna dla $p>1$ i rozbieżna dla $p\leqslant 1$.

Wniosek: Całka $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^p}$ jest rozbieżna dla każdego p. Jednak jeżeli $p\neq 1$, to niecałkowalna osobliwość jest tylko w jednym końcu przedziału całkowania.

Przykład 64:

Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^\infty \frac{x^\pi\,dx}{x^5+x^4}$.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{x^\pi\,dx}{x^5+x^4} = \int_0^1 \frac{x^\pi\,dx}{x^5+x^4} + \int_1^\infty \frac{x^\pi\,dx}{x^5+x^4}\,.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^\pi\,dx}{x^5+x^4} \leqslant \int_0^1 \frac{x^\pi\,dx}{0+x^4} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{4-\pi}} < +\infty\,,$$

bo $4-\pi<1$.

Podobnie

$$\int_1^\infty \frac{x^\pi\,dx}{x^5+x^4} \leqslant \int_1^\infty \frac{x^\pi\,dx}{x^5+0} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{5-\pi}} < +\infty\,,$$

bo $5-\pi>1$.

Przykład 65:
Obliczyć wartość całki niewłaściwej:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^4+\sqrt[2022]{|x|}+1}\,.$$

Rozwiązanie:
Całka jest równa zero jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera.

Przykład 66:
Obliczyć wartość całki niewłaściwej:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+\sqrt[2022]{|x|}+1}\,.$$

Rozwiązanie:
Podobnie jak w poprzednim przykładzie, całka jest równa zero jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera.

A właśnie, że NIE !!!!!

Całka niewłaściwa z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera:

• Może być zbieżna (jak w pierwszym z powyższych przykładów) i wtedy istotnie ma wartość zero.

• Ale może być rozbieżna (jak w drugim z powyższych przykładów) i wtedy przypisywanie jej jakiejkolwiek wartości nie ma sensu.