Całkowanie funkcji wymiernych.

Funkcją wymierną nazywamy funkcję będącą ilorazem dwóch wielomianów[43].

Możliwość całkowania funkcji wymiernych wynika z następujących dwóch faktów:
• Każdą funkcję wymierną potrafimy[44] wyrazić w postaci sumy wielomianu oraz specjalnych funkcji wymiernych zwanych ułamkami prostymi.
• Potrafimy scałkować każdy ułamek prosty.

Ułamkami prostymi nazywamy funkcje wymierne następujących postaci:

$$\frac{A}{(x+a)^n}\,, \qquad\qquad \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}\,,$$

gdzie a, b, A, B są liczbami rzeczywistymi, n jest liczbą całkowitą dodatnią, a trójmian kwadratowy x^2+ax+b nie ma pierwiastków rzeczywistych[45].

Najpierw nauczmy się całkować ułamki proste.

Dla ułamków prostych, których mianownik jest potęgą dwumianu liniowego, wzory są nam już dobrze znane:

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a|+C \qquad \text{oraz} \qquad \int \frac{dx}{(x+a)^n} = -\frac{1}{(n-1)\cdot(x+a)^{n-1}}+C \quad \text{dla } n\geqslant 2\,.$$

W przypadku, gdy mianownik ułamka prostego jest potęgą dwumianu kwadratowego x^2+1, możliwe są następujące cztery sytuacje[46]:

(1)
$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C\,,$$

(2)
$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{\ln(x^2+1)}{2}+C\,,$$

(3)
$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^n} = -\frac{1}{2\cdot(n-1)\cdot(x^2+1)^{n-1}}+C \quad \text{dla } n\geqslant 2\,,$$

(4)
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^n} = ????? \quad \text{dla } n\geqslant 2\,,$$

Przypadek **(4)** jest najbardziej kłopotliwy. Był on przedmiotem przykładów 24 i 25 (wykład 2, strony 15-16).

W przykładzie 26 (wykład 2, strona 17) zobaczyliśmy jak całkę z ułamka prostego o mianowniku będącym potęgą nierozkładalnego trójmianu kwadratowego możemy

[43] Oczywiście mianownik nie może być wielomianem tożsamościowo równym zeru.

[44] Teoretycznie potafimy, natomiast w praktyce może to być trudne. Problem polega na tym, że zakładamy możliwość znalezienia pierwiastków dowolnego wielomianu, czego w ogólności nie daje się zrobić przy użyciu czterech działań i pierwiastkowania. Uznajemy jednak, że rozwiązywanie równań wielomianowych jest problemem znacznie mniejszego kalibru niż całkowanie. W konsekwencji całka z funkcji wymiernej może być wyrażona jakimś wzorem, w którym mają prawo występować dowolne liczby rzeczywiste, nie tylko takie, które umiemy zapisać ładnym wzorkiem.

[45] Czyli nie rozkłada się na iloczyn wielomianów liniowych.

[46] Przypadki **(2)** i **(3)** wyliczamy dzięki podstawieniu $t=x^2+1$.

odpowiednimi podstawieniami sprowadzić do całki, która w mianowniku ma potęgę dwumianu kwadratowego x^2+1.

Dla zakończenia opisu metody całkowania funkcji wymiernych trzeba wyjaśnić jak rozkładać funkcje wymierne na sumę ułamków prostych.

Podstawowe kroki tej procedury są następujące:

• Mając daną funkcję wymierną $\frac{W(x)}{P(x)}$ wyłaczamy z niej część wielomianową. W tym celu dzielimy wielomian $W(x)$ przez wielomian $P(x)$ z resztą: $W(x)=Q(x)\cdot P(x)+R(x)$, gdzie $R(x)$ ma **mniejszy** stopień niż $P(x)$. Wówczas

$$\frac{W(x)}{P(x)}=\frac{Q(x)\cdot P(x)+R(x)}{P(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{P(x)}\,.$$

• Rozkładamy mianownik $P(x)$ na iloczyn potęg wielomianów nierozkładalnych nad $\mathbb{R}$, czyli liniowych oraz kwadratowych bez pierwiastków rzeczywistych.

• Dla każego czynnika $V(x)^n$ tego rozkładu uwzględniamy w rozkładzie n ułamków prostych z mianownikami $V(x)^k$ dla $k=1,2,\ldots,n$.

• Wymnażamy stronami[47] przez wspólny mianownik. Otrzymujemy równość wielomianów, przyrównujemy współczynniki po obu jej stronach i rozwiązujemy otrzymany w ten sposób układ równań liniowych w celu wyliczenia szukanych współczynników.

Przykład 27:

Wypisać postać rozkładu na ułamki proste funkcji wymiernej

$$\frac{W(x)}{(x+1)\cdot(x+7)^5\cdot\left(x^2+3x+37\right)^2\cdot\left(x^2-7x+73\right)^4}\,,$$

gdzie $W(x)$ jest wielomianem stopnia mniejszego od 18.

Rozwiązanie:

Należy uwzględnić ułamki proste z następującymi mianownikami:

• $x+1$,
• $(x+7)^k$ dla $k=1,2,3,4,5$,
• $\left(x^2+3x+37\right)^k$ dla $k=1,2$,
• $\left(x^2-7x+73\right)^k$ dla $k=1,2,3,4$.

Trzeba pamiętać, że w przypadku mianownika będącego potęgą funkcji liniowej licznik jest stałą, a w przypadku mianownika będącego potęgą funkcji kwadratowej licznik jest funkcją liniową.

W konsekwencji szukalibyśmy przedstawienia w postaci[48]:

$$\frac{W(x)}{(x+1)\cdot(x+7)^5\cdot\left(x^2+3x+37\right)^2\cdot\left(x^2-7x+73\right)^4}=$$

$$=\frac{A}{x+1}+$$

[47]Wymnażamy równanie (funkcja wymierna)=(postać rozkładu).

[48]Omijam literkę C, bo w całkach nieoznaczonych występuje jako stała całkowania, a także literkę O bardzo podobną do zera.

$$+\frac{B}{(x+7)^5}+\frac{D}{(x+7)^4}+\frac{E}{(x+7)^3}+\frac{F}{(x+7)^2}+\frac{G}{x+7}+$$
$$+\frac{Hx+I}{\left(x^2+3x+37\right)^2}+\frac{Jx+K}{x^2+3x+37}+$$
$$+\frac{Lx+M}{\left(x^2-7x+73\right)^4}+\frac{Nx+P}{\left(x^2-7x+73\right)^3}+\frac{Qx+R}{\left(x^2-7x+73\right)^2}+\frac{Sx+T}{x^2-7x+73}\,.$$

To kończy rozwiązanie zadania. Gdybyśmy chcieli znaleźć rozkład, należałoby powyższą równość przemnożyć stronami przez wspólny mianownik, powymnażać, a następnie ułożyć i rozwiązać układ 18 równań[49] liniowych z 18 niewiadomymi.

Przykład 28:
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int \frac{2x+3}{x^4+x^2}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:
$$\frac{2x+3}{x^4+x^2}=\frac{2x+3}{(x^2+1)\cdot x^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{D}{x^2}+\frac{E}{x}\,,$$
$$2x+3=(Ax+B)\cdot x^2+D\cdot\left(x^2+1\right)+E\cdot\left(x^2+1\right)\cdot x\,,$$
$$2x+3=Ax^3+Bx^2+Dx^2+D+Ex^3+Ex\,,$$
$$\begin{cases} 0 = A+E \\ 0 = B+D \\ 2 = E \\ 3 = D\,, \end{cases}$$
skąd $A=-2$ i $B=-3$. W konsekwencji
$$\int \frac{2x+3}{x^4+x^2}\,dx=\int \frac{-2x}{x^2+1}-\frac{3}{x^2+1}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x}\,dx=-\ln\left(x^2+1\right)-3\operatorname{arctg} x-\frac{3}{x}+2\ln|x|+C\,.$$

Przykład 29:
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Sposób I (normalny):
Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:
$$\frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{D}{x+2}+\frac{E}{x+3}\,,$$
$$\begin{aligned} 2x+3 &= A\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3) + B\cdot x\cdot(x+2)\cdot(x+3) + \\ &+ D\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+3) + E\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\,. \end{aligned} \qquad (*)$$

[49] Równania powstałyby z porównania współczynników przy x^k dla $k=0,1,2,\ldots,17$.

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (*), układaniem układu czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy[50] do równości (*) kolejno[51] $x=0, -1, -2, -3$. Otrzymujemy:

dla $x=0$ $\quad 3=6A, \quad$ skąd $\quad A=1/2,$

dla $x=-1$ $\quad 1=-2B, \quad$ skąd $\quad B=-1/2,$

dla $x=-2$ $\quad -1=2D, \quad$ skąd $\quad D=-1/2,$

dla $x=-3$ $\quad -3=-6E, \quad$ skąd $\quad E=1/2.$

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(\ln|x|-\ln|x+1|-\ln|x+2|+\ln|x+3|)+C\,.$$

Sposób II (trikowy):

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\int \frac{2x+3}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}\,dx=\int\frac{2x+3}{\big(x\cdot(x+3)\big)\cdot\big((x+1)\cdot(x+2)\big)}\,dx=$$
$$=\int\frac{2x+3}{(x^2+3x)\cdot(x^2+3x+2)}\,dx\,,$$

a następnie podstawiamy $t=x^2+3x$ i formalnie $dt=(2x+3)\,dx$. Otrzymujemy

$$\int\frac{2x+3}{(x^2+3x)\cdot(x^2+3x+2)}\,dx=\int\frac{dt}{t\cdot(t+2)}\,.$$

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\frac{1}{t\cdot(t+2)}=\frac{1/2}{t}-\frac{1/2}{t+2}\,,$$

co pozwala dokończyć obliczenia:

$$\int\frac{dt}{t\cdot(t+2)}=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}\,dt=\frac{1}{2}\cdot(\ln|t|-\ln|t+2|)+C=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\ln\left|x^2+3x\right|-\ln\left|x^2+3x+2\right|\right)+C\,.$$

[50] Taka metoda jest o wiele szybsza, zwłaszcza przy wysokim stopniu mianownika, jednak można ją wydajnie zastosować tylko w przypadku mianownika będącego iloczynem różnych czynników liniowych.

[51] To są wartości x, przy których czynniki liniowe się zerują.

Sprowadzanie całek do całek z funkcji wymiernych.

Poniżej $R(x, y)$ oznacza funkcję wymierną dwóch zmiennych[52].

Przykład 30:
Sprowadzić całkę
$$\int R\left(x, \sqrt{x+a}\right)\, dx$$
do całki z funkcji wymiernej.
Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie $t=\sqrt{x+a}$, czyli[53] $x=t^2-a$ i formalnie $dx=2t\,dt$, otrzymujemy
$$\int R\left(x, \sqrt{x+a}\right)\, dx = \int R\left(t^2-a, t\right)\cdot 2t\, dt\,.$$

Zauważmy, że jeśli R jest wielomianem, to daną całkę sprowadziliśmy do całki z wielomianu.

Przykład 31:
Sprowadzić całkę
$$\int R\left(x, \sqrt[n]{x+a}\right)\, dx$$
do całki z funkcji wymiernej.
Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie $t=\sqrt[n]{x+a}$, czyli[54] $x=t^n-a$ i formalnie $dx=nt^{n-1}\,dt$, otrzymujemy
$$\int R\left(x, \sqrt[n]{x+a}\right)\, dx = \int R\left(t^n-a, t\right)\cdot nt^{n-1}\, dt\,.$$

Zauważmy, że jeśli R jest wielomianem, to daną całkę sprowadziliśmy do całki z wielomianu.

Przykład 32:
Sprowadzić całkę
$$\int R\left(x, \sqrt[n]{a+\sqrt[m]{b+\sqrt[k]{c+x}}}\right)\, dx$$
do całki z funkcji wymiernej.
Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie $t=\sqrt[n]{a+\sqrt[m]{b+\sqrt[k]{c+x}}}$, czyli[55] kolejno
$$\sqrt[m]{b+\sqrt[k]{c+x}} = t^n-a\,,$$
$$\sqrt[k]{c+x} = (t^n-a)^m-b\,,$$
$$x = ((t^n-a)^m-b)^k-c\,,$$

[52] Czyli iloraz dwóch wielomianów dwóch zmiennych. W razie potrzeby $R(x)$ będzie funkcją wymierną jednej zmiennej.
[53] Przy dodatkowym założeniu $t\geqslant 0$.
[54] W przypadku parzystego n powinniśmy tu dodać dodatkowe założenie $t\geqslant 0$.
[55] Tym razem pominę formułowanie dodatkowego założenia o t, gdyż wymagałoby to grzebania się w parzystościach n, m, k i wynikających z tego nierównościach.

i formalnie

$$dx = W(t)\,dt\,,$$

gdzie $W(t)$ jest wielomianem będącym pochodną wielomianu $((t^n-a)^m-b)^k-c$, otrzymujemy

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{a+\sqrt[m]{b+\sqrt[k]{c+x}}}\right)\,dx = \int R\left(((t^n-a)^m-b)^k-c,\ t\right)\cdot W(t)\,dt\,.$$

Zauważmy, że jeśli R jest wielomianem, to daną całkę sprowadziliśmy do całki z wielomianu.

Przykład 33:
Sprowadzić całkę

$$\int R\left(x,\ \sqrt{(x-a)\cdot(x-b)}\right)\,dx\,,$$

gdzie $a \neq b$, do całki z funkcji wymiernej.

Rozwiązanie:
Wbrew pozorom podstawienie za $\sqrt{(x-a)\cdot(x-b)}$ nowej zmiennej nie przyniesie niczego dobrego. Problemem jest wielomian kwadratowy występujący pod pierwiastkiem. Okazuje się jednak, że można za nową zmienną podstawić iloraz funkcji liniowych pod pierwiastkiem. Otrzymujemy wówczas kolejno[56]

$$t = \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\,,$$

$$t^2 = \frac{x-a}{x-b}\,,$$

$$t^2 = \frac{x-b+(b-a)}{x-b}\,,$$

$$t^2 = 1+\frac{b-a}{x-b}\,,$$

$$t^2-1 = \frac{b-a}{x-b}\,,$$

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{x-b}{b-a}\,,$$

$$\frac{b-a}{t^2-1} = x-b\,,$$

$$\frac{b-a}{t^2-1}+b = x$$

i formalnie[57]

$$dx = \frac{2\cdot(a-b)\cdot t}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt\,.$$

[56]Znowu przyjmując założenie $t \geqslant 0$.
[57]Znak "–" rekompensujemy zmianą kolejności "a" i "b" w odejmowaniu.

Pozostaje zauważyć, że

$$\sqrt{(x-a)\cdot(x-b)}=|x-b|\cdot\sqrt{\frac{(x-a)}{(x-b)}}=\operatorname{sgn}(x-b)\cdot(x-b)\cdot\sqrt{\frac{(x-a)}{(x-b)}}\,,$$

gdzie $\operatorname{sgn}(x-b)$ jest po prostu stałą ±1, przyjmującą wartość -1 dla $x<b$ oraz wartość 1 dla $x>b$.

W konsekwencji

$$\int R\left(x,\,\sqrt{(x-a)\cdot(x-b)}\right)\,dx=\int R\left(\frac{b-a}{t^2-1}+b,\,\operatorname{sgn}\left(\frac{b-a}{t^2-1}\right)\cdot\frac{b-a}{t^2-1}\cdot t\right)\cdot\frac{2\cdot(a-b)\cdot t}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt\,.$$

Przykład 34:
Sprowadzić całkę

$$\int R\left(x,\,\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}\right)\,dx\,,$$

gdzie $a\neq b$, do całki z funkcji wymiernej.

Rozwiązanie:
wykonując podstawienie

$$t=\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}$$

otrzymujemy kolejno

$$t^n=\frac{x-a}{x-b}\,,$$

$$t^n=\frac{x-b+(b-a)}{x-b}\,,$$

$$t^n=1+\frac{b-a}{x-b}\,,$$

$$t^n-1=\frac{b-a}{x-b}\,,$$

$$\frac{1}{t^n-1}=\frac{x-b}{b-a}\,,$$

$$\frac{b-a}{t^n-1}=x-b\,,$$

$$\frac{b-a}{t^n-1}+b=x$$

i formalnie[58]

$$dx=\frac{n\cdot(a-b)\cdot t^{n-1}}{\left(t^n-1\right)^2}\,dt\,.$$

Wobec tego

$$\int R\left(x,\,\sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}\right)\,dx=\int R\left(\frac{b-a}{t^n-1}+b,\,t\right)\cdot\frac{n\cdot(a-b)\cdot t^{n-1}}{\left(t^n-1\right)^2}\,dt\quad.$$

[58]Znak "–" rekompensujemy zmianą kolejności "a" i "b" w odejmowaniu.

Przykład 35:
Sprowadzić całkę

$$\int R(e^x)\,dx$$

do całki z funkcji wymiernej.
Rozwiązanie:
Podstawiając $t=e^x$, czyli[59] $x=\ln t$ i formalnie $dx=\frac{dt}{t}$, otrzymujemy

$$\int R(e^x)\,dx=\int\frac{R(t)}{t}\,dt\,.$$

[59] A tutaj nie muszę wyraźnie zakładać $t>0$, gdyż założenie to jest ukryte w dziedzinie logarytmu.

Całka nieoznaczona – różne przykłady.

Przykład 36:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x\cdot \sqrt[5]{x^5+2x^4+x^3}}\,.$$

Rozwiązanie:
Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\int \frac{dx}{x\cdot \sqrt[5]{x^5+2x^4+x^3}}=\int \frac{dx}{x\cdot \sqrt[5]{x^3\cdot(x+1)^2}}=\int \frac{dx}{x^2\cdot \sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}}$$

i wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt[5]{\frac{x+1}{x}}\,,$$

czyli

$$t^5=1+\frac{1}{x}\,,$$

$$t^5-1=\frac{1}{x}$$

oraz formalnie

$$5t^4\,dt=-\frac{dx}{x^2}\,.$$

Otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x^2\cdot \sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}}=-\int \frac{1}{\sqrt[5]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}}\cdot\frac{-dx}{x^2}=-\int\frac{1}{t^2}\cdot 5t^4\,dt=-5\cdot\int t^2\,dt=-\frac{5\cdot t^3}{3}+C=$$

$$=-\frac{5}{3}\cdot\left(\sqrt[5]{\frac{x+1}{x}}\right)^3+C\,.$$

Odpowiedź:

$$\int \frac{dx}{x\cdot \sqrt[5]{x^5+2x^4+x^3}}=-\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{x+1}{x}\right)^{3/5}+C\,.$$

Przykład 37:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int\sqrt{e^x-1}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie $t=\sqrt{e^x-1}$, czyli $t^2=e^x-1$ i formalnie $2t\,dt=e^x\,dx$, otrzymujemy

$$\int\sqrt{e^x-1}\,dx=\int\frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x}\cdot e^x\,dx=\int\frac{t}{t^2+1}\cdot 2t\,dt=2\cdot\int\frac{t^2}{t^2+1}\,dt=2\cdot\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt=$$

$$=2\cdot\int 1\,dt-2\cdot\int\frac{1}{t^2+1}\,dt=2\cdot t-2\cdot\operatorname{arctg} t+C=2\cdot\sqrt{e^x-1}-2\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}+C\,.$$

Przykład 38:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$I(x)=\int \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x}\,dx\,.$$

Sprawdzić, że $I(e)=I(1)+2$, a jeśli tak nie jest, poszukać błędu rachunkowego.

Rozwiązanie:
Wykonujemy podstawienie $t=\sqrt{\ln x}$, czyli $x=e^{t^2}$ i formalnie $dx=e^{t^2}\cdot 2t\,dt$, a następnie całkujemy przez części:

$$I(x)=\int \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{x}\,dx=\int \frac{e^t}{e^{t^2}}\cdot e^{t^2}\cdot 2t\,dt=2\int t\cdot e^t\,dt=2t\cdot e^t-2\int e^t\,dt=2t\cdot e^t-2e^t+C=$$
$$=2\sqrt{\ln x}\cdot e^{\sqrt{\ln x}}-2e^{\sqrt{\ln x}}+C\,.$$

Sprawdzenie:

$$I(1)=-2+C\,,$$
$$I(e)=C=-2+2+C=I(1)+2\,.$$

Przykład 39:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int e^x\cdot\sin\sqrt{e^x+1}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Wykonując podstawienie $t=\sqrt{e^x+1}$, czyli $t^2=e^x+1$ i formalnie $2t\,dt=e^x\,dx$, a następnie całkując przez części, otrzymujemy

$$\int e^x\cdot\sin\sqrt{e^x+1}\,dx=\int \sin t\cdot 2t\,dt=2\cdot\int t\cdot\sin t\,dt=2\cdot t\cdot(-\cos t)-2\cdot\int 1\cdot(-\cos t)\,dt=$$
$$=-2\cdot t\cdot\cos t+2\cdot\int \cos t\,dt=-2\cdot t\cdot\cos t+2\cdot\sin t+C=$$
$$=-2\cdot\sqrt{e^x+1}\cdot\cos\sqrt{e^x+1}+2\cdot\sin\sqrt{e^x+1}+C\,.$$

Przykład 40:
Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{los}x=\operatorname{nos}x,\qquad \frac{d}{dx}\operatorname{nos}x=\operatorname{sos}x,\qquad \frac{d}{dx}\operatorname{sos}x=\operatorname{los}x\,.$$

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \operatorname{los}^2 x\,dx$$

wyrażając wynik przy pomocy funkcji los, nos i sos.

Rozwiązanie:
Oznaczmy obliczaną całkę przez $I(x)$ i wykonajmy trzykrotnie całkowanie przez części. Otrzymujemy:

$$I(x)=\int \operatorname{los}^2 x\,dx=\int \operatorname{los}x\cdot\operatorname{los}x\,dx=\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\int \operatorname{sos}x\cdot\operatorname{nos}x\,dx=$$

$$=\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\operatorname{nos}x\cdot\operatorname{nos}x+\int\operatorname{nos}x\cdot\operatorname{sos}x\,dx=$$

$$=\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\operatorname{nos}^2x+\operatorname{los}x\cdot\operatorname{sos}x-\int\operatorname{los}x\cdot\operatorname{los}x\,dx=2\cdot\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\operatorname{nos}^2x-I(x)\,.$$

Dostaliśmy więc równanie

$$I(x)=2\cdot\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\operatorname{nos}^2x-I(x)\,,$$

czyli

$$2\cdot I(x)=2\cdot\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\operatorname{nos}^2x+C_1\,,$$

skąd otrzymujemy rozwiązanie zadania

$$\int\operatorname{los}^2x\,dx=I(x)=\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\frac{\operatorname{nos}^2x}{2}+C\,.$$

Uwaga:

Można było zakończyć rachunki po jednokrotnym całkowaniu przez części, jeśli zauważymy, że funkcja podcałkowa jest iloczynem pewnej funkcji i jej pochodnej:

$$\int\operatorname{los}^2x\,dx=\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\int\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{nos}x\,dx=\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\int\operatorname{nos}'x\cdot\operatorname{nos}x\,dx=$$

$$=\operatorname{sos}x\cdot\operatorname{los}x-\frac{\operatorname{nos}^2x}{2}+C\,.$$

Przykład 41:

Wyrazić całkę nieoznaczoną

$$I_n(x)=\int x^n\cdot\sin\sqrt{x}\,dx$$

za pomocą $I_{n-1}(x)$.

Rozwiązanie:

Przyjęcie we wzorach

$$\int f'(x)\cdot\sin f(x)\,dx=-\cos f(x)+C$$

oraz

$$\int f'(x)\cdot\cos f(x)\,dx=\sin f(x)+C$$

funkcji $f(x)=\sqrt{x}$ prowadzi odpowiednio do

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx=-\cos\sqrt{x}+C$$

oraz

$$\int\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx=\sin\sqrt{x}+C\,.$$

W oparciu o powyższe wzory wykonujemy dwukrotnie całkowanie przez części (różniczkując pierwszy czynnik i całkując drugi):

$$I_n(x)=\int x^n\cdot\sin\sqrt{x}\,dx=2\cdot\int x^{n+1/2}\cdot\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx=$$

$$=2\cdot x^{n+1/2}\cdot\left(-\cos\sqrt{x}\right)-2\cdot\int\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot x^{n-1/2}\cdot\left(-\cos\sqrt{x}\right)\,dx=$$

$$= -2\cdot x^{n+1/2}\cdot\cos\sqrt{x} + (2n+1)\cdot\int x^{n-1/2}\cdot\cos\sqrt{x}\,dx =$$

$$= -2\cdot x^{n+1/2}\cdot\cos\sqrt{x} + 2\cdot(2n+1)\cdot\int x^{n}\cdot\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= -2\cdot x^{n+1/2}\cdot\cos\sqrt{x} + 2\cdot(2n+1)\cdot x^{n}\cdot\sin\sqrt{x} - 2\cdot(2n+1)\cdot\int n\cdot x^{n-1}\cdot\sin\sqrt{x}\,dx =$$

$$= -2\cdot x^{n+1/2}\cdot\cos\sqrt{x} + 2\cdot(2n+1)\cdot x^{n}\cdot\sin\sqrt{x} - 2n\cdot(2n+1)\cdot I_{n-1}(x)\,.$$

Odpowiedź:

$$I_n(x) = -2\cdot x^{n+1/2}\cdot\cos\sqrt{x} + 2\cdot(2n+1)\cdot x^{n}\cdot\sin\sqrt{x} - 2n\cdot(2n+1)\cdot I_{n-1}(x) =$$
$$= -2\cdot x^{n}\cdot\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x} + 2\cdot(2n+1)\cdot x^{n}\cdot\sin\sqrt{x} - 2n\cdot(2n+1)\cdot I_{n-1}(x)\,.$$

Bardziej wyrafinowane podstawienia prowadzące do całek z funkcji wymiernych.

Przykład 42:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Narzucające się podstawienie $t=\sqrt{x^2+1}$ nie prowadzi do szybkiego rozwiązania, bo zamiast niewymierności $\sqrt{x^2+1}$ pojawia się niewymierność $\sqrt{t^2-1}$. Wprawdzie w przykładzie 33 nauczyliśmy się, że niewymierność $\sqrt{t^2-1}=\sqrt{(t-1)\cdot(t+1)}$ można sprowadzić do funkcji wymiernej podstawieniem $s=\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$, ale rachunki są nieco uciążliwe. Jednak jest to jakaś droga prowadząca do celu, a lepsza taka droga niż żadna.

W literaturze można znaleźć[60] podstawienie $\sqrt{x^2+1}=x+t$, które wygląda na wyciągnięte z kapelusza.

Zanim je zastosujemy, postaram się wyjaśnić, skąd się ono bierze.

Wyobraźmy sobie, że chcemy odpowiednio dobranym podstawieniem sprowadzić całkę

$$\int R\left(x,\,\sqrt{x^2+1}\right)\,dx\,,$$

gdzie $R(x,y)$ jest funkcją wymierną dwóch zmiennych, do całki z funkcji wymiernej.

Aby mieć gwarancję, że podstawienie to nie wprowadzi niepożądanych zanieczyszczeń do funkcji wymiernej, powinno ono mieć postać

$$x=W(t)\,, \tag{1}$$

gdzie W jest niestałą funkcją wymierną jednej zmiennej. Wówczas mamy też formalny wzór

$$dx=W'(t)\,dt\,.$$

W tym samym czasie chcemy pozbyć się pierwiastka, a zatem rozważane podstawienie powinno prowadzić do zależności

$$\sqrt{x^2+1}=Q(t)\,, \tag{2}$$

gdzie Q jest niestałą funkcją wymierną jednej zmiennej.

Konfrontując równości (1) i (2) otrzymujemy zależność

$$W^2(t)+1=Q^2(t)\,;$$

czyli

$$1=(Q(t)-W(t))\cdot(Q(t)+W(t))\,. \tag{3}$$

Potrzebujemy więc rozkładu funkcji stałej równej 1 na iloczyn dwóch niestałych funkcji wymiernych. Najprostszy taki rozkład to $t\cdot\frac{1}{t}$, co dopasowane do wzoru (3) daje

$$Q(t)-W(t)=t \quad \text{oraz} \quad Q(t)+W(t)=\frac{1}{t}\,.$$

[60] Jest to tzw. pierwsze podstawienie Eulera, często podawane w wariancie $\sqrt{x^2+1}=-x+t$.

Stąd otrzymujemy

$$Q(t)=\frac{t+\frac{1}{t}}{2}=\frac{t^2+1}{2t} \quad \text{oraz} \quad W(t)=\frac{-t+\frac{1}{t}}{2}=\frac{-t^2+1}{2t}\,.$$

Wobec tego

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{t}{2}+\frac{1}{2t} \quad \text{oraz} \quad x=-\frac{t}{2}+\frac{1}{2t}\,,$$

co prowadzi do

$$\sqrt{x^2+1}-x=t\,,$$

a więc wyciągniętej wcześniej z kapelusza formy podstawienia. Ponieważ

$$W'(t)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2t^2}=-\frac{t^2+1}{2t^2}\,,$$

otrzymujemy komplet wzorków potrzebnych do wykonania podstawienia:

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{t^2+1}{2t}, \qquad x=\frac{-t^2+1}{2t} \quad \text{oraz} \quad dx=-\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt\,.$$

W konsekwencji[61]

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2+1}\right)\,dx=\int R\left(\frac{-t^2+1}{2t},\frac{t^2+1}{2t}\right)\cdot\left(-\frac{t^2+1}{2t^2}\right)\,dt\,.$$

Zastosujmy to podstawienie do rozważanej całki:

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\int\frac{t^2+1}{2t}\cdot\left(-\frac{t^2+1}{2t^2}\right)\,dt=-\frac{1}{4}\int\frac{t^4+2t^2+1}{t^3}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{4}\int t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\,dt=-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{t^2}{2}+2\cdot\ln|t|-\frac{1}{2t^2}\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}{2}+2\cdot\ln\underbrace{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}_{>0}-\frac{1}{2\cdot\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^2}{2}+2\cdot\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)-\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^2}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+C\,.$$

---

[61]Dopasowanie do wzoru (3) iloczynu $\frac{1}{t}\cdot t$ daje bardzo zbliżone podstawienie:

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{t^2+1}{2t}, \qquad x=\frac{t^2-1}{2t} \quad \text{oraz} \quad dx=\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt\,,$$

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2+1}\right)\,dx=\int R\left(\frac{t^2-1}{2t},\frac{t^2+1}{2t}\right)\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt\,.$$

Podstawienie to jest oparte na zależności

$$t=x+\sqrt{x^2+1}\,.$$

Przykład 43:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}\,.$$

Rozwiązanie:
Zastosujemy podstawienie sprowadzające dowolną całkę postaci

$$\int R(\sin x,\,\cos x)\;dx\,,$$

gdzie $R(x,y)$ jest funkcją wymierną dwóch zmiennych, do całki z funkcji wymiernej.

Podstawieniem tym jest

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\qquad \frac{x}{2}=\operatorname{arctg} t,\qquad x=2\cdot\operatorname{arctg} t,\qquad dx=\frac{2}{t^2+1}\,dt,$$

$$\sin x=\frac{2t}{t^2+1},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1}\,,$$

przy czym trzeba się trochę pobawić tożsamościami trygonometrycznymi, aby otrzymać ostatnie dwa wzory.

Tak więc w ogólnym przypadku

$$\int R(\sin x,\,\cos x)\;dx=\int R\left(\frac{2t}{t^2+1},\,\frac{1-t^2}{t^2+1}\right)\cdot\frac{2}{t^2+1}\,dt\,.$$

Wracając do całki podanej w treści rozważanego przykładu otrzymujemy:

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}=\int \frac{\frac{2}{t^2+1}\,dt}{3+\frac{2t}{t^2+1}+\frac{1-t^2}{t^2+1}}=\int \frac{2\,dt}{3t^2+3+2t+1-t^2}=\int \frac{2\,dt}{2t^2+2t+4}=$$

$$=\int \frac{dt}{t^2+t+2}=\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}= \qquad s=t+\tfrac{1}{2},\ dt=ds$$

$$=\int \frac{ds}{s^2+\frac{7}{4}}=\int \frac{ds}{\frac{7}{4}\cdot\left(\frac{2s}{\sqrt7}\right)^2+\frac{7}{4}}= \qquad y=\tfrac{2s}{\sqrt7},\ s=\tfrac{y\sqrt7}{2},\ ds=\tfrac{dy\sqrt7}{2}$$

$$=\int \frac{\frac{dy\sqrt7}{2}}{\frac{7}{4}\cdot y^2+\frac{7}{4}}=\frac{2}{\sqrt7}\cdot\int\frac{dy}{y^2+1}=\frac{2}{\sqrt7}\cdot\operatorname{arctg} y+C=\frac{2}{\sqrt7}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2s}{\sqrt7}+C=$$

$$=\frac{2}{\sqrt7}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt7}+C=\frac{2}{\sqrt7}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt7}+C\,.$$