Całkowanie przez części.

Zadanie 18 z listy 1 można przepisać w postaci:

$$\int f_1'(x)\cdot f_2(x)+f_1(x)\cdot f_2'(x)\,dx=f_1(x)\cdot f_2(x)+C\,,$$

a jeśli ktoś woli uniknąć indeksów zmniejszających czytelność wzoru, to po odpowiedniej zmianie oznaczeń możemy napisać:

$$\int f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\,dx=f(x)\cdot g(x)+C$$

lub po rozbiciu sumy na dwie całki:

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx+\int f(x)\cdot g'(x)\,dx=f(x)\cdot g(x)+C\,.$$

Przeniesienie jednej z tych całek na drugą stronę prowadzi do wzoru[17]

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx=f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)\,dx\,.$$

Z ostatniego wzoru wynika, że problem obliczenia całki nieoznaczonej

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

możemy zastąpić problemem obliczenia całki nieoznaczonej

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx\,.$$

Czyli zamiast obliczać całkę z iloczynu, możemy próbować obliczyć całkę z nieco innego iloczynu. Pozornie wydaje się, że taka zamiana nie przynosi wielkich korzyści. Są jednak sytuacje, kiedy dzięki takiemu zabiegowi jesteśmy w stanie doprowadzić rachunki do szczęśliwego końca.

Zanim przyjrzymy się przykładom zastosowania powyższego wzoru[18], przepiszmy go przy nieco zmienionych oznaczeniach tak, aby czynniki funkcji podcałkowej były oznaczone pojedynczymi literkami:

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx=F(x)\cdot g(x)-\int F(x)\cdot g'(x)\,dx\,,$$

gdzie F jest funkcją pierwotną funkcji f. Innymi słowy, jeśli mamy obliczyć całkę nieoznaczoną z iloczynu, to możemy to zagadnienie przehandlować na problem obliczenia całki z pokrewnego iloczynu, w którym jeden czynnik został zróżniczkowany, a drugi scałkowany. Potrzebujemy dwóch rzeczy. Po pierwsze nabrać jakiegoś wyczucia, kiedy taki zabieg ma szansę doprowadzić nas do upragnionego wyniku. A po drugie, opanować rzemiosło rachunkowe tak, aby sprawnie i poprawnie takie całkowanie przez części wykonać.

---

[17]Zauważ brak stałej całkowania. Wynika on z tego, że każda całka nieoznaczona zawiera w sobie ukrytą stałą całkowania. Nie piszemy więc stałej całkowania po tej stronie równości, po której występuje choćby jedna całka nieoznaczona.

[18]To jest właśnie tytułowe całkowanie przez części.

Przykład 13:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x \cdot e^x \, dx \, .$$

Rozwiązanie:
Funkcja podcałkowa jest zapisana jako iloczyn i ten właśnie iloczyn wykorzystamy przy całkowaniu przez części. Trzeba jednak podjąć decyzję: który czynnik będziemy całkować, a który różniczkować. A to wymaga odpowiedzi na pytanie: co chcemy osiągnąć przez zmianę poszczególnych czynników? Czynnik drugi, czyli e^x, nie zmienia się ani przy różniczkowaniu, ani przy całkowaniu. Tak więc tutaj niczego nie zyskamy, ale i niczego nie stracimy.

Zajmijmy się więc pierwszym czynnikiem x. Możemy go albo zróżniczkować (do stałej 1) albo scałkować (do $x^2/2$). Czyli mamy do wyboru doprowadzenie zagadnienia do obliczenia całki[19]

$$\int 1 \cdot e^x \, dx \qquad \text{albo} \qquad \int x^2 \cdot e^x \, dx \, .$$

Od razu dostrzegamy, że pierwsza całka jest bardzo prosta do wyliczenia. Powinniśmy więc całkować przez części różniczkując czynnik x i całkując czynnik e^x. Otrzymujemy więc

$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + C \, .$$

Dlaczego to zadziałało ?

Zobaczyliśmy przykład pierwszego sposobu zastosowania całkowania przez części:
Jeżeli jeden czynnik funkcji podcałkowej jest wielomianem, a drugi czynnik może wziąć "na klatę" dużo całkowań[20], to całkując przez części (jeśli trzeba, to wielokrotnie) jesteśmy w stanie różniczkowaniami unicestwić czynnik wielomianowy nie czyniąc istotnej szkody po stronie drugiego czynnika, który może być bez problemu całkowany.

Przyjrzyjmy się kolejnym przykładom **takiego właśnie** zastosowania całkowania przez części.

Przykład 14:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2 \cdot \sin 3x \, dx \, .$$

Rozwiązanie:
Przeprowadzimy dwukrotne całkowanie przez części różniczkując czynnik x^2, a całkując czynnik $\sin 3x$.

Spróbuj wykonać samodzielnie odpowiednie rachunki przed zajrzeniem na kolejną stronę.

[19] Z dokładnością do stałego czynnika, który nie wpływa na trudność obliczenia całki.
[20] Takimi czynnikami są na przykład e^{ax+b}, $\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$, ale także $(ax+b)^c$.

$$\int x^2 \cdot \sin 3x\, dx = x^2 \cdot \frac{-\cos 3x}{3} - \int 2x \cdot \frac{-\cos 3x}{3}\, dx =$$
$$= x^2 \cdot \frac{-\cos 3x}{3} - 2x \cdot \frac{-\sin 3x}{9} + \int 2 \cdot \frac{-\sin 3x}{9}\, dx =$$
$$= -\frac{x^2 \cdot \cos 3x}{3} + \frac{2x \cdot \sin 3x}{9} + \frac{2 \cdot \cos 3x}{27} + C\,.$$

Przykład 15:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x \cdot \sqrt{x+1}\, dx\,.$$

Rozwiązanie:
Przeprowadzimy całkowanie przez części różniczkując czynnik x, a całkując czynnik $\sqrt{x+1}$. Otrzymujemy:

$$\int x \cdot \sqrt{x+1}\, dx = x \cdot \frac{2 \cdot (x+1)^{3/2}}{3} - \int 1 \cdot \frac{2 \cdot (x+1)^{3/2}}{3}\, dx =$$
$$= x \cdot \frac{2 \cdot (x+1)^{3/2}}{3} - \frac{4 \cdot (x+1)^{5/2}}{15} + C\,.$$

Przykład 16:
Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x \cdot (x+1)^{99}\, dx\,.$$

Rozwiązanie:
W czym problem? Przecież funkcja podcałkowa jest wielomianem, a dobrze wiadomo jak całkować wielomiany. To prawda, ale zastosowanie wzoru na całkowanie ogólnego wielomianu wymagałoby zapisania funkcji podcałkowej w postaci sumy jednomianów[21], których w tym wypadku byłoby 100. Szczerze mówiąc nie palimy się do wykonania takich rachunków.

Wobec tego przeprowadzimy całkowanie przez części różniczkując czynnik x, a całkując czynnik $(x+1)^{99}$. Otrzymujemy:

$$\int x \cdot (x+1)^{99}\, dx = x \cdot \frac{(x+1)^{100}}{100} - \int 1 \cdot \frac{(x+1)^{100}}{100}\, dx =$$
$$= x \cdot \frac{(x+1)^{100}}{100} - \frac{(x+1)^{101}}{10100} + C\,.$$

[21] A to wymagałoby zastosowania wzoru dwumianowego Newtona do $(x+1)^{99}$.

Przykład 17:
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int x\cdot \ln x\, dx\,.$$

Rozwiązanie:
Nauczeni poprzednimi przykładami chcielibyśmy przeprowadzimy całkowanie przez części różniczkując czynnik x, a całkując czynnik $\ln x$. Tu jednak czeka nas przykra niespodzianka, bo nie potrafimy od ręki podać funkcji pierwotnej logarytmu. Logarytm nie jest funkcją, którą w prosty sposób można całkować. Ma on jednak inną własność, a mianowicie jego pochodna jest o wiele prostszą funkcją niż on sam. Może więc opłaci się nam zróżniczkować logarytm, nawet za cenę scałkowania[22] czynnika wielomianowego.

Wobec tego przeprowadzimy całkowanie przez części różniczkując czynnik $\ln x$, a całkując czynnik x. Otrzymujemy:
$$\int x\cdot \ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2}\cdot \ln x - \int \frac{x}{2}\, dx = \frac{x^2}{2}\cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C\,.$$

To jest przykład drugiego sposobu zastosowania całkowania przez części:
Jeżeli jeden czynnik funkcji podcałkowej jest wielomianem, a drugi czynnik bardzo się upraszcza przy różniczkowaniu[23], to całkujemy przez części całkując czynnik wielomianowy i różniczkując drugi czynnik.

Przykład 18:
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int \ln x\, dx\,.$$

Rozwiązanie:
Wprowadzamy sztuczny czynnik 1, a następnie całkujemy przez części różniczkując czynnik $\ln x$, a całkując czynnik 1. Otrzymujemy:
$$\int 1\cdot \ln x\, dx = x\cdot \ln x - \int x\cdot \frac{1}{x}\, dx = x\cdot \ln x - \int 1\, dx = x\cdot \ln x - x + C\,.$$

Przykład 19:
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int e^x\cdot \sin x\, dx\,.$$

Rozwiązanie:
Całkujemy przez części różniczkując[24] czynnik $\sin x$, a całkując czynnik e^x. Otrzymujemy:
$$\int e^x\cdot \sin x\, dx = e^x\cdot \sin x - \int e^x\cdot \cos x\, dx\,.$$
W tym momencie wydaje się, że taka zabawa do niczego nie prowadzi, bo otrzymaliśmy całkę prawie takiej samej postaci jak wyjściowa całka.

[22] Czyli w konsekwencji za cenę podniesienia stopnia wielomianu.
[23] Takimi czynnikami są na przykład logarytm oraz arcus tangens.
[24] W tym przykładzie jest obojętne, który czynnik różniczkujemy, a który całkujemy.

Wykonajmy kolejne całkowanie przez części, pamiętając, aby różniczkować ten sam czynnik, który różniczkowaliśmy poprzednio[25]:

$$e^x\cdot\sin x-\int e^x\cdot\cos x\,dx=e^x\cdot\sin x-\left(e^x\cdot\cos x-\int e^x\cdot(-\sin x)\,dx\right)=$$

$$=e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x-\int e^x\cdot\sin x\,dx\,.$$

Przyjmując oznaczenie

$$I(x)=\int e^x\cdot\sin x\,dx$$

możemy przepisać efekt przeprowadzonych rachunków jako

$$I(x)=e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x-I(x)\,,$$

skąd można wyliczyć $I(x)$. Otrzymujemy więc

$$\int e^x\cdot\sin x\,dx=I(x)=\frac{e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x}{2}+C\,.$$

To jest przykład trzeciego sposobu zastosowania całkowania przez części:
Jeżeli całkowanie przez części prowadzi do tej samej całki[26], ale ze współczynnikiem różnym od 1, to otrzymamy równanie pozwalające wyliczyć całkę nieoznaczoną.

Całkowanie przez podstawienie.

Zadanie 19 z listy 1 można przepisać w postaci:

$$\int f_1'(f_2(x))\cdot f_2'(x)\,dx=f_1(f_2(x))+C\,,$$

a jeśli ktoś woli uniknąć indeksów zmniejszających czytelność wzoru, to po odpowiedniej zmianie oznaczeń możemy napisać:

$$\int f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx=f(g(x))+C\,.$$

[25]W przeciwnym razie drugie całkowanie przez częsci odwróci efekt pierwszego i wrócimy do wyjściowej całki.

[26]Dzieje się tak na przykład wtedy, gdy czynniki są postaci e^{ax}, $\sin ax$, $\cos ax$.

Zanim przyjrzymy się przykładom zastosowania powyższego wzoru[27], przepiszmy go przy nieco zmienionych oznaczeniach tak, aby czynniki funkcji podcałkowej były oznaczone pojedynczymi literkami:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x))+C\,,$$

gdzie F jest funkcją pierwotną funkcji f. Innymi słowy, jeśli mamy obliczyć całkę nieoznaczoną ze złożenia dwóch funkcji mnożonego przez pochodną funkcji wewnętrznej[28], to możemy to zagadnienie sprowadzić do znalezienia funkcji pierwotnej funkcji zewnętrznej.

Podstawowa[29] procedura jest więc taka. Mamy do obliczenia całkę nieoznaczoną. Udaje nam się zapisać funkcję podcałkową w postaci wyrażenia zależnego od $g(x)$ mnożonego przez $g'(x)$:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx\,.$$

No to teraz cała rzecz sprowadza się do znalezienia funkcji pierwotnej funkcji f, czyli do obliczenia całki nieoznaczonej[30]

$$\int f(t)\,dt\,.$$

Oczywiście nie bedziemy na co dzień zamieszczać takiego opisu słownego jak powyżej. Po prostu dokonamy formalnego zabiegu zmiany zmiennej całkowania[31] oznajmiając, że stosujemy podstawienie $t=g(x)$ i dokonując odpowiedniej transformacji funkcji podcałkowej, a także formalnej zamiany wyrażenia $g'(x)\,dx$ na dt. Pamiętajmy, że równość

$$g'(x)\,dx = dt$$

ma charakter czysto formalny i nie będziemy jej nadawać osobnego sensu.

Cały rachunek będzie wyglądał następująco:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t)+C = F(g(x))+C\,,$$

musimy bowiem pamiętać, aby na końcu przepisać wynik w języku zmiennej, która występowała w wyjściowej całce. Odnotujmy też, że przy zmianie zmiennej[32] możemy sto-

[27] To jest właśnie esencja tytułowego całkowania przez podstawienie, chociaż będziemy go także używać w nieco innych konfiguracjach.

[28] W tej chwili może się to wydawać dość karkołomne, bo sugeruje, że będzie trzeba zapisywać funkcję podcałkową w takiej bardzo specyficznej postaci. Jak później zobaczymy, nie jest tak źle, bo wprowadzimy reguły rachunkowe, które bardzo uproszczą całą procedurę.

[29] Może niezbyt wygodna w bardziej skomplikowanych przykładach, ale wystarczająca na etapie zaznajamiana się z metodą całkowania przez podstawienie.

[30] Celowo zmienną oznaczyłem inną literką.

[31] O całkowaniu przez podstawienie mówi się także jak o zmianie zmiennej całkowania.

[32] Zarówno przy wykonywaniu podstawienia w całce, jak i przy przekształcaniu końcowego wyniku do wyjściowej zmiennej.

sować nie tylko zależność $t=g(x)$, ale także zależność $x=g^{-1}(t)$, gdzie g^{-1} jest funkcją odwrotną do g.

Popatrzmy teraz na proste przykłady.

Przykład 20:
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int x\cdot e^{x^2}\,dx\,.$$
Rozwiązanie:
Ponieważ dominującym elementem funkcji podcałkowej jest czynnik e^{x^2}, spróbujemy[33] wykonać podstawienie $t=x^2$.

Podstawienie $t=x^2$ wiąże się z formalnym wzorem $dt=2x\,dx$, który wykorzystamy do przekształcenia całki do nowej zmiennej. Cały rachunek będzie wyglądał następująco:
$$\int x\cdot e^{x^2}\,dx=\int \frac{1}{2}\cdot e^{x^2}\cdot 2x\,dx=\int \frac{1}{2}\cdot e^{t}\,dt=\frac{e^t}{2}+C=\frac{e^{x^2}}{2}+C\,.$$

Przykład 21:
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx\,.$$
Rozwiązanie:
Wykonamy podstawienie[34] $t=x^2+1$, które wiąże się z formalnym wzorem $dt=2x\,dx$. Otrzymujemy[35]:
$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx=\int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\,dx=\int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}\,dt=\frac{\ln|t|}{2}+C=\frac{\ln(x^2+1)}{2}+C\,.$$

Przykład 22:
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int x\cdot\sqrt{x+1}\,dx\,.$$
Rozwiązanie:
To jest powtórzony przykład 15 (strona 9). Wówczas zastosowaliśmy całkowanie przez części, ale można tu równie dobrze wykonać podstawienie.

[33] To jest też szczególny przykład ogólnej wskazówki dotyczącej wyboru podstawienia: jeżeli w argumencie funkcji wykładniczej lub trygonometrycznej występuje jakieś wyrażenie, to spróbować podstawić je za nową zmienną.

[34] Postawienie $t=x^2$ byłoby również skuteczne.

[35] Zauważ, że pomijamy moduł w argumencie logarytmu w momencie, gdzy widać, że argument ten jest oczywiście dodatni.

Jakie podstawienie? Otóż mając funkcję podcałkową w postaci wielomianu zanieczyszczonego jakimś pierwiastkiem, możemy próbować podstawić ten pierwiastek za nową zmienną[36].

Stosując dotychczas poznane procedury, przymierzamy się do wykonania podstawienia $t=\sqrt{x+1}$, czyli formalnie $dt=\frac{dx}{2\cdot\sqrt{x+1}}$. To się daje zrobić (spróbuj !!!), ale jest dość niewygodne, bo trzeba by wydłubać z funkcji podcałkowej czynnik $\frac{1}{2\cdot\sqrt{x+1}}$, aby go doklеić do dx, a resztę funkcji podcałkowej wyrazić w zależności od $\sqrt{x+1}$.

Można uprościć rachunki zauważając, że podstawienie

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx=\int f(t)\,dt$$

oparte na formalnej zależności $dt=g'(x)\,dx$ można równie dobrze wykonać wychodząc od wyrażenia starej zmiennej przez nową $x=g^{-1}(t)$, które prowadzi do formalnej zależności $dx=\left(g^{-1}\right)'(t)\,dt$. W konsekwencji ogólny schemat[37] takiego podstawienia ma postać

$$\int f(x)\,dx=\int f\left(g^{-1}(t)\right)\cdot\left(g^{-1}\right)'(t)\,dt$$

Wracając do rozważanego przykładu, to zależność $t=\sqrt{x+1}$ jest równoważna[38] zależności $x=t^2-1$, która daje formalną zależność $dx=2t\,dt$. W konsekwencji możemy przeprowadzić obliczenie danej całki następująco:

$$\int x\cdot\sqrt{x+1}\,dx=\int\left(t^2-1\right)\cdot t\cdot 2t\,dt=2\cdot\int t^4-t^2\,dt=\frac{2\cdot t^5}{5}-\frac{2\cdot t^3}{3}+C=$$
$$=\frac{2\cdot(x+1)^{5/2}}{5}-\frac{2\cdot(x+1)^{3/2}}{3}+C\,.$$

A w przykładzie 15 wyszło nam

$$x\cdot\frac{2\cdot(x+1)^{3/2}}{3}-\frac{4\cdot(x+1)^{5/2}}{15}+C\,.$$

To który wynik jest poprawny?

Uwaga: Związek między starą i nową zmienną w podstawieniu może mieć też postać obustronnie uwikłaną:

$$g(x)=h(t)\,.$$

[36]Na razie nie będę wyjaśniał, kiedy takie podstawienie daje pewność powodzenia, a kiedy jedynie mglistą szansę.

[37]Literka f oznacza w tym wzorze inną funkcję niż we wzorze powyżej. Tutaj f jest całą funkcją podcałkową, podczas gdy poprzednio jedynie występowała w funkcji podcałkowej. Nie chcę jednak sięgać tu do kolejnych liter alfabetu.

[38]Przy dodatkowym warunku $t\geqslant 0$. Często jednak obliczanie całek nieoznaczonych sprowadza się do bezrefleksyjnego mielenia wzorkami i nie zwraca się wówczas uwagi na założenia o zakresie wartości poszczególnych zmiennych.

Wówczas można zastosować formalny wzór
$$g'(x)\,dx = h'(t)\,dt\,.$$

Przykład 23:
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int \sqrt[3]{x^5+1}\cdot x^4\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Wykonujemy podstawienie $t=\sqrt[3]{x^5+1}$, czyli $t^3=x^5+1$ i formalnie $3t^2\,dt=5x^4\,dx$.
Otrzymujemy:
$$\int \sqrt[3]{x^5+1}\cdot x^4\,dx = \frac{1}{5}\cdot\int \sqrt[3]{x^5+1}\cdot 5x^4\,dx = \frac{1}{5}\cdot\int t\cdot 3t^2\,dt =$$
$$= \frac{3}{5}\cdot\int t\cdot t^2\,dt = \frac{3}{5}\cdot\int t^3\,dt = \frac{3\cdot t^4}{20}+C = \frac{3}{20}\cdot\left(x^5+1\right)^{4/3}+C\,.$$

Przykład 24:
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}\,.$$

Rozwiązanie:
Główna sztuczka opiera się na dosyć nieoczekiwanym[39] całkowaniu przez części w całce
$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx\,.$$
W tym celu wyciągniemy z licznika czynnik x, który będziemy różniczkować, a drugi czynnik x wraz z mianownikiem będziemy całkować[40]. Otrzymujemy:
$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx = \int x\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx = x\cdot\frac{-1}{2\cdot\left(x^2+1\right)} - \int 1\cdot\frac{-1}{2\cdot\left(x^2+1\right)}\,dx =$$
$$= -\frac{x}{2\cdot\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{x^2+1}\,dx = -\frac{x}{2\cdot\left(x^2+1\right)} + \frac{\mathrm{arctg}x}{2} + C\,.$$

Druga, mniej zaskakująca[41] sztuczka, polega na zapisaniu licznika 1 w wyjściowej całce w postaci $(x^2+1)-x^2$ w celu rozbicia obliczanej całki na dwie całki. Składając to wszystko razem otrzymujemy:
$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \int \frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx = \int \frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx - \int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx =$$

[39] Nieoczekiwanym, jeśli ktoś czegoś takiego wcześniej nie widział.

[40] Całkowanie tego czynnika wykonujemy przez podstwienie $t=x^2+1$ otrzymując
$$\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx = -\frac{1}{2\cdot\left(x^2+1\right)}+C\,.$$

[41] Ale też nieoczywista, jeśli ktoś nie jest przyzwyczajony do tego typu manipulacji wyrażeniami algebraicznymi.

$$=\int\frac{1}{x^2+1}\,dx-\int\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx=\operatorname{arctg}x-\left(-\frac{x}{2\cdot(x^2+1)}+\frac{\operatorname{arctg}x}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{x}{2\cdot(x^2+1)}+\frac{\operatorname{arctg}x}{2}+C\,.$$

Przykład 25:

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}\,.$$

Rozwiązanie:

Przeprowadzimy obliczenia identyczną metodą jak w przykładzie poprzednim oraz wykorzystamy uzyskaną w poprzednim przykładzie całkę:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x}{2\cdot(x^2+1)}+\frac{\operatorname{arctg}x}{2}+C\,.$$

Otrzymujemy:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}=\int\frac{(x^2+1)-x^2}{\left(x^2+1\right)^3}\,dx=\int\frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)^3}\,dx-\int\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^3}\,dx=$$

$$=\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx-\int x\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)^3}\,dx=$$

$$=\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx-\left(x\cdot\frac{-1}{4\cdot\left(x^2+1\right)^2}-\int 1\cdot\frac{-1}{4\cdot\left(x^2+1\right)^2}\,dx\right)=$$

$$=\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx+\frac{x}{4\cdot\left(x^2+1\right)^2}-\frac{1}{4}\cdot\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx=\frac{x}{4\cdot\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{4}\cdot\int\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx=$$

$$=\frac{x}{4\cdot\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{x}{2\cdot(x^2+1)}+\frac{\operatorname{arctg}x}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{x}{4\cdot\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3\cdot x}{8\cdot(x^2+1)}+\frac{3\cdot\operatorname{arctg}x}{8}+C\,.$$

W analogiczny sposób możemy sprowadzić problem obliczenia całki

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}$$

do całki

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{n-1}}\,.$$

A teraz zobaczmy na przykładzie, jak można odpowiednimi podstawieniami sprowadzić przypadek funkcji wymiernej z potęgą ogólnego trójmianu kwadratowego w mianowniku do całki ze standardowym dwumianem x^2+1.

Przykład 26:
Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int \frac{x+1}{x^2+6x+14}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:
Najpierw przekształćmy trójmian kwadratowy do postaci: kwadrat dwumianu liniowego plus stała. Otrzymujemy:
$$\int \frac{x+1}{x^2+6x+14}\,dx=\int \frac{x+1}{(x+3)^2+5}\,dx\,.$$
Teraz podstawmy otrzymany dwumian liniowy za nową zmienną, czyli $y=x+3$ lub równoważnie $x=y-3$ i formalnie $dx=dy$:
$$\int \frac{x+1}{(x+3)^2+5}\,dx=\int \frac{y-2}{y^2+5}\,dy\,.$$
Następnie wykonajmy przekształcenia algebraiczne przygotowujące całkę do kolejnego podstawienia mającego na celu zrównanie w mianowniku współczynnika przy y^2 z wyrazem wolnym:
$$\int \frac{y-2}{y^2+5}\,dy=\int \frac{y-2}{5\cdot\left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2+5}\,dy\,.$$
Podstawmy za nową zmienną wyrażenie w nawiasie w mianowniku:
$$t=\frac{y}{\sqrt{5}}\,,\qquad y=\sqrt{5}\cdot t\,,\qquad dy=\sqrt{5}\,dt\,,$$
$$\int \frac{y-2}{5\cdot\left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2+5}\,dy=\int \frac{\sqrt{5}\cdot t-2}{5\cdot t^2+5}\cdot\sqrt{5}\,dt=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\int \frac{\sqrt{5}\cdot t-2}{t^2+1}\,dt=$$
$$=\int \frac{t}{t^2+1}\,dt-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\int \frac{1}{t^2+1}\,dt=\frac{\ln(t^2+1)}{2}-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\mathrm{arctg}t+C\,.$$
Teraz wystarczy przekształcić wynik do wyjściowej zmiennej:
$$\frac{\ln(t^2+1)}{2}-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\mathrm{arctg}t+C=\frac{\ln(\frac{y^2}{5}+1)}{2}-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\mathrm{arctg}\frac{y}{\sqrt{5}}+C=$$
$$=\frac{\ln(\frac{(x+3)^2}{5}+1)}{2}-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\mathrm{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{5}}+C=\frac{\ln(\frac{x^2+6x+14}{5})}{2}-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\mathrm{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{5}}+C=$$
$$=\frac{\ln(x^2+6x+14)}{2}-\frac{\ln 5}{2}-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\mathrm{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{5}}+C=$$
$$=\frac{\ln(x^2+6x+14)}{2}-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\mathrm{arctg}\frac{x+3}{\sqrt{5}}+C_1\,,$$
gdyż stała $\frac{\ln 5}{2}$ zostaje wchłonięta przez stałą całkowania[42].

Przykład powyższy jest na tyle ogólny, że wiadomo już jak poradzić sobie z dowolną potęgą dowolnego nierozkładalnego trójmianu kwadratowego w mianowniku.

[42] Dlatego do stałej całkowania dopisujemy indeks, żeby uwzględnić to, że się zmieniła przy wchłanianiu składnika $\frac{\ln 5}{2}$.