

Całka nieoznaczona – podstawy.

W poprzednim semestrze poznaliśmy operację różniczkowania funkcji, która funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych przyporządkowuje inną¹ funkcję, zwaną pochodną. Formalnie rzecz biorąc pochodną można przyporządkować każdej funkcji², jednak najbardziej interesuje nas sytuacja, gdy wyjściowa funkcja jest określona na przedziale³ lub sumie przedziałów, a pochodną ma na całej lub prawie⁴ całej dziedzinie.

Poznaliśmy reguły różniczkowania, które praktycznie pozwalają zapisać wzorem pochodną każdej funkcji zapisanej wzorem⁵. Taką operacją różniczkowania można się bawić, stosując ją do funkcji wielokrotnie i uzyskując pochodne wysokich rzędów.

Naturalnym pytaniem jest pytanie o operację odwrotną do różniczkowania⁶.

Zajmiemy się więc następującym zagadnieniem: Dana jest tajna funkcja różniczkowalna na przedziale otwartym lub na sumie przedziałów otwartych, której to funkcji wprawdzie nie znamy, ale podano nam jej pochodną. Czy i w jakim stopniu możemy na podstawie tej pochodnej odtworzyć samą funkcję? Lub zagadnienie pokrewne: Dla danej funkcji⁷ znaleźć funkcję, której ta dana funkcja jest pochodną.

Na początek zajmiemy się sytuacjami, kiedy funkcję taką możemy odgadnąć lub prawie odgadnąć. A to dzięki temu, że łatwo skojarzymy, czego pochodną jest podana funkcja, bądź też łatwo wskażemy funkcję, której pochodna jest na tyle podobna do danej funkcji, że możemy dokonać odpowiednich korekt.

Przykład 1:

Odgadnąć wzór na funkcję różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, której pochodna jest dana wzorem

$$f'(x) = \cos x.$$

Rozwiązanie:

Przypominając sobie tabelkę funkcji i ich pochodnych, kojarzymy, że warunek ten jest spełniony przez funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = \sin x.$$

¹Inną, to znaczy "potencjalnie inną". Żeby mi ktoś zaraz nie wyjechał z funkcją wykładniczą określoną wzorem e^x , której pochodna jest funkcją tą samą, a nie inną.

²Koszttem ewentualnego okrojenia dziedziny, która w skrajnym wypadku może okazać się pusta.

³Otwartym czy domkniętym? Celowo tego nie precyzuję.

⁴Celowo też nie precyzuję użytego tu słowa "prawie".

⁵I tutaj celowo nie precyzuję, o jakim dokładnie zbiorze wzorów mówię.

⁶Z wprowadzaniem operacji odwrotnych do operacji, z którymi się już oswoiliśmy, mamy do czynienia od wczesnych etapów edukacji: operacją odwrotną do dodawania jest odejmowanie, do mnożenia dzielenie, do potęgowania z ustalonym wykładnikiem pierwiastkowanie, do potęgowania z ustaloną podstawą logarytmowanie i tak dalej.

⁷Dla ustalenia uwagi pomyślmy o funkcji ciągłej, a najlepiej podanej fajnym wzorkiem.

Przykład 2:

Odgadnąć wzór na funkcję różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, której pochodna jest dana wzorem

$$f'(x) = x.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ przy różniczkowaniu funkcji potęgowej wykładnik obniża się o 1, spróbujemy podwyższyć wykładnik o 1, czyli rozważyć funkcję określoną wzorem x^2 . Jednak to prowadzi do pochodnej $2x$, czyli dwukrotnie za dużej. Wobec tego dzielimy x^2 przez 2 i stwierdzamy, że warunki zadania spełnia

$$f(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Przykład 3:

Wyznaczyć wszystkie takie funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Odpowiedź:

Takimi funkcjami f są funkcje stałe.

Przykład 4:

Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Odpowiedź:

Powyższy warunek spełniają takie funkcje g , że dla pewnej stałej rzeczywistej C :

$$g(x) = f(x) + C.$$

Przykład 5:

Dane są funkcje różniczkowalne $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f_1'(x) + f_2'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Odpowiedź:

Powyższy warunek spełniają takie funkcje g , że dla pewnej stałej rzeczywistej C :

$$g(x) = f_1(x) + f_2(x) + C.$$

Przykład 6:

Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz liczba rzeczywista a . Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = a \cdot f'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Odpowiedź:

Powyższy warunek spełniają takie funkcje g , że dla pewnej stałej rzeczywistej C :

$$g(x) = a \cdot f(x) + C.$$

Przykład 7:

Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz liczba rzeczywista a . Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdej liczby rzeczywistej x warunek $g'(x) = f'(x+a)$.

Odpowiedź:

Powyższy warunek spełniają takie funkcje g , że dla pewnej stałej rzeczywistej C :

$$g(x) = f(x+a) + C.$$

Przykład 8:

Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz niezerowa liczba rzeczywista a . Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R}$ warunek $g'(x) = f'(ax)$.

Odpowiedź:

Powyższy warunek spełniają takie funkcje g , że dla pewnej stałej rzeczywistej C :

$$g(x) = \frac{f(ax)}{a} + C.$$

Przykład 9:

Odgadnąć wzór na funkcję różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, której pochodna jest dana wzorem

$$f'(x) = (x+1)^2.$$

Odpowiedź:

Taką funkcją jest

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{3}.$$

Przykład 10:

Odgadnąć wzór na funkcję różniczkowalną $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, której pochodna jest dana wzorem

$$f'(x) = x^2 + 2x + 1.$$

Odpowiedź:

Taką funkcją jest

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x.$$

Przykład 11:

Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, których pochodna jest dana wzorem

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Odpowiedź błędna:

Powyższy warunek spełniają takie (i tylko takie) funkcje f , że dla pewnej stałej rzeczywistej C :

$$f(x) = \ln|x| + C.$$

Morał stąd jest taki, że znajomość jednej funkcji pierwotnej jest równoważna ze znajomością wszystkich funkcji pierwotnych, gdyż wszystkie funkcje pierwotne różnią się o stałą.

Funkcję pierwotną funkcji f nazywamy też **całką nieoznaczoną** i stosujemy oznaczenie:

$$\int f(x) dx,$$

przy czym tak naprawdę powyższy napis nie oznacza jednej funkcji pierwotnej, ale ogólny wzór¹³ dający wszystkie funkcje pierwotne. W konsekwencji wzór ten musi zawierać w sobie niejednoznaczność funkcji pierwotnej, czyli stałą C , która może przyjąć dowolną wartość. Stałą tą nazywamy stałą całkowania i oznaczamy lietrą C . Gdyby zaszła potrzeba użycia kilku różnych stałych całkowania w jednym wzorze, użyjemy litery C z indeksem lub kolejnych liter alfabetu.

Zgodny z tą konwencją zapis nawiązujący do Przykładu 2, to:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Wzory, do których nawiązują Przykłady 5–8, możemy zapisać następująco:

$$\int f_1(x) \pm f_2(x) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

$$\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$$

$$F' = f \quad \Rightarrow \quad \int f(x+a) dx = F(x+a) + C$$

$$F' = f \quad \Rightarrow \quad \int f(ax) dx = \frac{F(ax)}{a} + C$$

Z kolei Przykłady 9–10 dają odpowiednio

$$\int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + \frac{1}{3} + C$$

oraz

$$\int x^2 + 2x + 1 = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C,$$

co wobec równości lewych stron mogłoby sugerować

$$\frac{x^3}{3} + x^2 + x + \frac{1}{3} + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C,$$

skąd

$$\frac{1}{3} = 0.$$

¹³Czasami mówi się, że całka nieoznaczona jest zbiorem wszystkich funkcji pierwotnych, co jednak nie byłoby wygodne, bo dodawanie całek nieoznaczonych byłoby dodawaniem zbiorów, którą to operację trzeba by jakoś zdefiniować.

W rzeczywistości jednak składnik $1/3$ jest wchłaniany przez stałą całkowania, a nieporozumienie bierze się ze skonfrontowania ze sobą dwóch wzorów, w których różne stałe zostały oznaczone tą samą literą.

Powinniśmy napisać

$$\int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + \frac{1}{3} + C_1$$

oraz

$$\int x^2 + 2x + 1 = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C_2,$$

co doprowadziłyby do równości

$$\frac{1}{3} + C_1 = C_2,$$

która po prostu wiąże ze sobą stałe całkowania występujące w dwóch różnych wzorach.

I na koniec nawiązanie do Przykładu 11, gdzie¹⁴

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

To może błędnie sugerować, że wszystkie funkcje pierwotne funkcji określonej wzorem $1/x$ są postaci $\ln|x| + C$. Tymczasem nadszedł odpowiedni moment, aby wyjaśnić wcześniejsze kłamstwo. Otóż funkcja o zerowej pochodnej nie musi być stała. Ona musi być stała na każdym przedziale¹⁵ wchodzącym w skład dziedziny, ale na różnych przedziałach mogą to być różne stałe. Nie rozróżniamy tego zapisując stałą całkowania, która tak naprawdę oznacza funkcję stałą na każdym przedziale dziedziny. Ale faktycznie funkcje pierwotne funkcji określonej wzorem $1/x$ są postaci

$$\begin{cases} \ln x + C_1 & \text{dla } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

gdzie C_1 i C_2 są dowolnymi stałymi.

Obejrzyj w internecie¹⁶ wykład doc. Górniaka z PWr:

Odcinek **61**: Definicja funkcji pierwotnej; całki nieoznaczonej.

¹⁴Możemy też użyć skróconego zapisu:

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x}.$$

¹⁵W języku topologicznym: na każdej składowej spójnej.

¹⁶Pod adresem: <https://oze.pwr.edu.pl/kursy/analiza/analiza.html>