179. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)} .$$

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.

Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(2+\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}}{\left(3-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(3+\frac{2}{n}\right) \cdot \left(3+\frac{5}{n}\right)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 0}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 0 .$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)} \geqslant \frac{(2n+1) \cdot (2n+3)}{(3n+2) \cdot (3n+5) \cdot (3n+8)} ,$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\frac{2n-1}{3n-1} \geqslant \frac{2n+3}{3n+8} ,$$

$$(2n-1) \cdot (3n+8) \geqslant (2n+3) \cdot (3n-1) ,$$

$$6n^2 + 13n - 8 \geqslant 6n^2 + 7n - 3 ,$$

$$6n \geqslant 5 ,$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

180. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+2} .$$

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, które wymaga spełnienia następujących trzech warunków:

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.

Spełnienie tego warunku jest oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
Sprawdzamy to następująco:

$$\frac{n}{n^2+2}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}\to\frac{0}{1+0}=0\,.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.
W celu udowodnienia tego warunku udowodnimy nierówność

$$\frac{n}{n^2+2}\geqslant\frac{n+1}{(n+1)^2+2}\,,$$

która jest równoważna kolejnym nierównościom:

$$n\cdot\left(n^2+2n+3\right)\geqslant(n+1)\cdot\left(n^2+2\right)\,,$$

$$n^3+2n^2+3n\geqslant n^3+n^2+2n+2\,,$$

$$n^2+n\geqslant 2\,,$$

co jest spełnione dla każdego $n\geqslant 1$.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

181. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{(3n+1)\cdot(3n+4)\cdot(3n+7)\cdot(3n+10)}\,.$$

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{(3n+1)\cdot(3n+4)\cdot(3n+7)\cdot(3n+10)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}{\left(3+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{4}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{7}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{10}{n}\right)}=\frac{1\cdot1\cdot1\cdot0}{3\cdot3\cdot3\cdot3}=0\,.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.
Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{(3n+1)\cdot(3n+4)\cdot(3n+7)\cdot(3n+10)}\geqslant\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{(3n+4)\cdot(3n+7)\cdot(3n+10)\cdot(3n+13)}\,,$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\frac{n}{3n+1} \geqslant \frac{n+3}{3n+13},$$

$$n\cdot(3n+13) \geqslant (n+3)\cdot(3n+1),$$

$$3n^2+13n \geqslant 3n^2+10n+3,$$

$$3n \geqslant 3,$$

$$n \geqslant 1,$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

182. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+100}.$$

Rozwiązanie:

Spróbujemy udowodnić zbieżność danego szeregu korzystając z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Aby to udowodnić, musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne – oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+100} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{100}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.
Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{\sqrt{n}}{n+100} \geqslant \frac{\sqrt{n+1}}{n+101}, \qquad (*)$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\sqrt{n}\cdot(n+101) \geqslant \sqrt{n+1}\cdot(n+100),$$

$$n\cdot(n+101)^2 \geqslant (n+1)\cdot(n+100)^2,$$

$$n\cdot\left(n^2+202n+10201\right) \geqslant (n+1)\cdot\left(n^2+200n+10000\right),$$

$$n^3+202n^2+10201n \geqslant n^3+201n^2+10200n+10000,$$

$$n^2+n \geqslant 10000,$$

$$n\cdot(n+1) \geqslant 100\cdot 100,$$

skąd wynika, że nierówność $(*)$ jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n\geqslant 100$.

Zatem szereg $\sum_{n=100}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+100}$ spełnia warunki kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, wobec czego jest zbieżny.

Ponieważ zbieżność szeregu nie zależy od zmiany lub pominięcia skończenie wielu wyrazów, także szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+100}$ jest zbieżny.

183. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right).$$

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych, które wymaga spełnienia następujących trzech warunków:

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne.
2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.

Warunki te stają się oczywiste po zapisaniu wartości bezwzględnych wyrazów szeregu w innej postaci:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

184. Wiedząc, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2,$$

obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego, w której na przemian występuje 100 wyrazów dodatnich i jeden ujemny:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{2}+\frac{1}{201}+\frac{1}{203}+\ldots+\frac{1}{399}-\frac{1}{4}+\frac{1}{401}+\frac{1}{403}+\ldots+\frac{1}{599}-\frac{1}{6}+$$
$$+\frac{1}{601}+\frac{1}{603}+\ldots+\frac{1}{799}-\frac{1}{8}+\frac{1}{801}+\frac{1}{803}+\ldots+\frac{1}{999}-\frac{1}{10}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1003}+\ldots$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, jego zbieżność (i sumę) można zbadać rozważając tylko co 101-szą sumę częściową. Otrzymujmy

$$S_{101n}=\sum_{i=1}^{100n}\frac{1}{2i-1}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i}=\sum_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}+\sum_{i=n+1}^{100n}\frac{1}{2i-1}.$$

Skoro wiemy, że $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$, definicja zbieżności szeregu daje

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}=\ln 2\,.$$

Ponadto oznaczając $f(x)=1/(2x)$ otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n+1}^{100n}\frac{1}{2i-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=n+1}^{100n}\frac{1}{(2i-1)/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=n+1}^{100n}f\left(\frac{i-1/2}{n}\right)=\int_1^{100}f(x)\,dx=$$

$$=\int_1^{100}\frac{dx}{2x}=\frac{\ln|x|}{2}\Bigg|_{x=1}^{100}=\frac{\ln 100}{2}-\frac{\ln 1}{2}=\frac{\ln 100}{2}=\ln 10\,.$$

Ostatecznie

$$\lim_{n\to\infty}S_{101n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}+\sum_{i=n+1}^{100n}\frac{1}{2i-1}\right)=\ln 2+\ln 10=\ln 20\,.$$

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa $\ln 20\approx 2,9957$.

185. Wśród poniższych sześciu szeregów wskaż szereg zbieżny, a następnie udowodnij jego zbieżność. Jeśli potrafisz, oblicz jego sumę.

(**A**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{7n+10}$ (**B**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n^2+1)}{3n^2+n}$ (**C**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+n}$

(**D**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2+1)}{2n^2+1}$ (**E**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n^2+1)}{77n-1}$ (**F**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{2011n+2012}$

Rozwiązanie:

Szeregiem zbieżnym jest szereg (**C**).

Aby to udowodnić, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych. W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{0-0}{1+0}=0\,.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.
Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{2n-1}{n(n+1)}\geqslant\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}\,,$$

czyli

$$\frac{2n-1}{n} \geqslant \frac{2n+1}{n+2} \,,$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$(2n-1)(n+2) \geqslant (2n+1)n$$

$$2n^2+3n-2 \geqslant 2n^2+n$$

$$2n \geqslant 2$$

$$n \geqslant 1 \,,$$

a to jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych n.

Zatem na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych szereg **(C)** jest zbieżny.

W celu obliczenia sumy szeregu **(C)** rozkładamy jego wyrazy na ułamki proste:

$$\frac{2n-1}{n^2+n} = \frac{2n-1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$$

$$2n-1 = A(n+1)+Bn$$

$$2n-1 = An+A+Bn$$

$$2 = A+B, \quad -1 = A$$

$$A = -1, \quad B = 3 \,.$$

Wykorzystujemy otrzymany rozkład do rozłożenia szeregu na sumę dwóch szeregów przypominających szereg anharmoniczny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n-1)}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-(-1)^n}{n} + \frac{3\cdot(-1)^n}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 3\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \,.$$

W drugim szeregu zmieniamy numerację podstawiając $k=n+1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 3\cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + 3\cdot \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) - 1 \right) = 4\ln 2 - 3 \,.$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy ze znajomości sumy szeregu anharmonicznego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \,.$$

Odpowiedź: Suma szeregu **(C)** jest równa $4\ln 2 - 3$.

W każdym z czterech kolejnych zadań udziel siedmiu **niezależnych** odpowiedzi:
Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)
R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)
N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)
X - nie istnieje szereg spełniający podany warunek

Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że jego wyrazy są różne od zera, a ponadto ciąg jego wyrazów (a_n) spełnia podany warunek

186. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, gdzie

a) $g=-3$ **R** b) $g=-1$ **R** c) $g=-1/3$ **R**

d) $g=0$ **N** e) $g=1/3$ **R** f) $g=1$ **R** g) $g=3$ **R**

187. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, gdzie

a) $g=-3$ **R** b) $g=-1$ **N** c) $g=-1/3$ **Z**

d) $g=0$ **Z** e) $g=1/3$ **Z** f) $g=1$ **N** g) $g=3$ **R**

188. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = g$, gdzie

a) $g=-3$ **Z** b) $g=-1$ **N** c) $g=-1/3$ **R**

d) $g=0$ **R** e) $g=1/3$ **R** f) $g=1$ **N** g) $g=3$ **Z**

189. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g$, gdzie

a) $g=-3$ **X** b) $g=-1$ **X** c) $g=-1/3$ **X**

d) $g=0$ **Z** e) $g=1/3$ **Z** f) $g=1$ **N** g) $g=3$ **R**

190. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg liczbowy jest zbieżny.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(p^2-3\right)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $p\in\left(\mathbf{-2,\ -\sqrt{2}}\right)\cup\left(\mathbf{\sqrt{2},\ 2}\right)$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2-5\right)^n}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $p\in\left(\mathbf{-\sqrt{6},\ -2}\right]\cup\left[\mathbf{2,\ \sqrt{6}}\right)$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2-8\right)^n}{n}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $p\in\left(\mathbf{-3,\ -\sqrt{7}}\right]\cup\left[\mathbf{\sqrt{7},\ 3}\right)$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(p^2-10\right)^n}{n^2}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $p\in\left[\mathbf{-\sqrt{11},\ -3}\right]\cup\left[\mathbf{3,\ \sqrt{11}}\right]$

191. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n^2}\cdot\binom{2n}{n}^n\cdot n^{n^2}}{(n!)^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a. Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium Cauchy'ego do danego w zadaniu szeregu:

$$\sqrt[n]{\frac{a^{n^2}\cdot\binom{2n}{n}^n\cdot n^{n^2}}{(n!)^n}}=\frac{a^n\cdot\binom{2n}{n}\cdot n^n}{n!}=b_n\,.$$

Następnie stosujemy kryterium d'Alemberta do ciągu (b_n):

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a^{n+1}\cdot\binom{2n+2}{n+1}\cdot(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n\cdot\binom{2n}{n}\cdot n^n}=\frac{a\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot(n+1)}{(n+1)^2\cdot(n+1)}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=$$

$$=\frac{a\cdot(2n+1)\cdot 2}{(n+1)}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to 4ea$$

przy $n\to\infty$.

Jeżeli $4e\cdot a<1$, czyli $a<1/4e$, to na podstawie kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (b_n) wnioskujemy, że

$$\lim_{n\to\infty}b_n=0<1\,,$$

wobec czego w oparciu o kryterium Cauchy'ego zastosowane do szeregu danego w treści zadania wnioskujemy, że szereg ten jest zbieżny.

Jeżeli zaś $4e\cdot a>1$, czyli $a>1/4e$, to $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty>1$, skąd wynika, że szereg jest rozbieżny.

Odpowiedź:

Dany szereg jest zbieżny dla liczb dodatnich $a<\frac{1}{4e}$, a rozbieżny dla $a>\frac{1}{4e}$.

192. W każdym z poniższych 16 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z, R, N**:
Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)
R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)
N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny, ciąg (c_n) jest zbieżny, ciąg (d_n) jest rozbieżny. Co można wywnioskować o zbieżności

a) ciągu (a_n) **Z**

b) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ **N**

c) ciągu (b_n) **N**

d) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ **R**

e) ciągu (a_n+b_n) **N**

f) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ **R**

g) ciągu (c_n+d_n) **R**

h) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n+d_n)$ **R**

i) ciągu (a_n+c_n) **Z**

j) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+c_n)$ **N**

k) ciągu (a_n+d_n) **R**

l) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+d_n)$ **R**

m) ciągu (b_n+c_n) **N**

n) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n+c_n)$ **N**

o) ciągu (b_n+d_n) **N**

p) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n+d_n)$ **N**