Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek/środę 26/27.04.2022.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami.

179. Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{(3n-1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+5)} .$$

180. Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+2} .$$

181. Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(3n+1) \cdot (3n+4) \cdot (3n+7) \cdot (3n+10)} .$$

182. Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+100} .$$

183. Udowodnić zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\right) .$$

184. Wiedząc, że
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 ,$$
obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego, w której na przemian występuje 100 wyrazów dodatnich i jeden ujemny:
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{199}-\frac{1}{2}+\frac{1}{201}+\frac{1}{203}+\ldots+\frac{1}{399}-\frac{1}{4}+\frac{1}{401}+\frac{1}{403}+\ldots+\frac{1}{599}-\frac{1}{6}+$$
$$+\frac{1}{601}+\frac{1}{603}+\ldots+\frac{1}{799}-\frac{1}{8}+\frac{1}{801}+\frac{1}{803}+\ldots+\frac{1}{999}-\frac{1}{10}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1003}+\ldots$$

185. Wśród poniższych sześciu szeregów wskaż szereg zbieżny, a następnie udowodnij jego zbieżność. Jeśli potrafisz, oblicz jego sumę.

(A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{7n+10}$ **(B)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2+1)}{3n^2+n}$ **(C)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{n^2+n}$

(D) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2+1)}{2n^2+1}$ **(E)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n^2+1)}{77n-1}$ **(F)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{2011n+2012}$

W każdym z czterech kolejnych zadań udziel siedmiu **niezależnych** odpowiedzi:
Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)
R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny, a przy tym szereg spełniający podany warunek istnieje)
N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)
X - nie istnieje szereg spełniający podany warunek

Co można wywnioskować o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jeżeli wiadomo, że jego wyrazy są różne od zera, a ponadto ciąg jego wyrazów (a_n) spełnia podany warunek

186. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$, gdzie

a) $g=-3$ .... **b)** $g=-1$ .... **c)** $g=-1/3$ ....

d) $g=0$ ..... **e)** $g=1/3$ ..... **f)** $g=1$ ..... **g)** $g=3$ .....

187. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, gdzie

a) $g=-3$ .... **b)** $g=-1$ .... **c)** $g=-1/3$ ....

d) $g=0$ ..... **e)** $g=1/3$ ..... **f)** $g=1$ ..... **g)** $g=3$ .....

188. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = g$, gdzie

a) $g=-3$ .... **b)** $g=-1$ .... **c)** $g=-1/3$ ....

d) $g=0$ ..... **e)** $g=1/3$ ..... **f)** $g=1$ ..... **g)** $g=3$ .....

189. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g$, gdzie

a) $g=-3$ .... **b)** $g=-1$ .... **c)** $g=-1/3$ ....

d) $g=0$ ..... **e)** $g=1/3$ ..... **f)** $g=1$ ..... **g)** $g=3$ .....

190. Podaj w postaci przedziału lub uporządkowanej sumy przedziałów zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których podany szereg liczbowy jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(p^2-3\right)^n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $p \in$ ....

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(p^2-5\right)^n}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $p \in$ ....

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(p^2-8\right)^n}{n}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $p \in$ ....

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(p^2-10\right)^n}{n^2}$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $p \in$ ....

191. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n^2} \cdot \binom{2n}{n}^n \cdot n^{n^2}}{(n!)^n}$$

w zależności od parametru rzeczywistego dodatniego a. Dla jednej wartości a można nie udzielić odpowiedzi.

192. W każdym z poniższych 16 pytań w miejscu kropek postaw jedną z liter **Z, R, N**:
Z - jest **Z**bieżny (tzn. musi być zbieżny)
R - jest **R**ozbieżny (tzn. musi być rozbieżny)
N - może być zbieżny lub rozbieżny (tzn. **N**ie wiadomo, czasem jest zbieżny, a czasem rozbieżny)

Wiadomo, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny, ciąg (c_n) jest zbieżny, ciąg (d_n) jest rozbieżny. Co można wywnioskować o zbieżności

a) ciągu (a_n) ....

b) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ....

c) ciągu (b_n) ....

d) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ ....

e) ciągu (a_n+b_n) ....

f) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ ....

g) ciągu (c_n+d_n) ....

h) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n+d_n)$ ....

i) ciągu (a_n+c_n) ....

j) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+c_n)$ ....

k) ciągu (a_n+d_n) ....

l) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+d_n)$ ....

m) ciągu (b_n+c_n) ....

n) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n+c_n)$ ....

o) ciągu (b_n+d_n) ....

p) szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n+d_n)$ ....