

166. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3+n} - n)$$

jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia (na różnicę sześciątów), a następnie wykonujemy szacowanie, aby skorzystać z kryterium porównawczego:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3+n} - n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^3+n)^{2/3} + n \cdot (n^3+n)^{1/3} + n^2} \geq \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^3+7n^3)^{2/3} + n \cdot (n^3+7n^3)^{1/3} + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 + 2n^2 + n^2} = \frac{1}{7} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podany szereg jest rozbieżny.

167. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[4]{n^4+n} - n)$$

jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Korzystamy dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów, a następnie wykonujemy szacowanie, aby skorzystać z kryterium porównawczego:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[4]{n^4+n} - n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt[4]{n^4+n} + n) \cdot (\sqrt{n^4+n} + n^2)} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt[4]{n^4+0} + n) \cdot (\sqrt{n^4+0} + n^2)} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny.

168. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}).$$

Rozwiązanie:

Przekształcimy dany w zadaniu szereg korzystając ze wzoru na różnicę sześciątów, a następnie skorzystamy z kryterium porównawczego:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^{2/3} + n^{2/3} \cdot \sqrt[3]{n^2+1} + n^{4/3}} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+0)^{2/3} + n^{2/3} \cdot \sqrt[3]{n^2+0} + n^{4/3}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}} < +\infty, \end{aligned}$$

bo $4/3 > 1$.

Odpowiedź: Dany w treści zadania szereg jest zbieżny.

169. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{28^n \cdot (n!)^3}.$$

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu skorzystamy z kryterium d'Alemberta.

W tym celu przekształcimy iloraz kolejnych wyrazów szeregu, przejdziemy z nim do granicy przy $n \rightarrow \infty$, a następnie porównamy otrzymaną granicę z liczbą 1:

$$\frac{(3n+3)!}{28^{n+1} \cdot ((n+1)!)^3} \cdot \frac{28^n \cdot (n!)^3}{(3n)!} = \frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{28 \cdot (n+1)^3} \rightarrow \frac{27}{28} < 1,$$

skąd wynika, że dany w treści zadania szereg jest zbieżny.

170. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 18^n}{\binom{3n}{n} \cdot n^n}.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego w zadaniu szeregu:

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)! \cdot 18^{n+1}}{\binom{3n+3}{n+1} \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{\binom{3n}{n} \cdot n^n}{n! \cdot 18^n} &= \frac{(n+1) \cdot 18 \cdot \frac{(3n)!}{n! \cdot (2n)!}}{\frac{(3n+3)!}{(n+1)! \cdot (2n+2)!} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} = \\ &= \frac{18}{\frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot (3n+3)}{(n+1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{18}{\frac{(3n+1) \cdot (3n+2) \cdot 3}{(n+1) \cdot (2n+1) \cdot 2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{18}{\frac{27}{4} \cdot e} = \frac{8}{3e} = \frac{2, (6)}{e} < 1, \end{aligned}$$

skąd na mocy kryterium d'Alemberta wynika zbieżność szeregu.

Skorzystaliśmy przy tym z nierówności $e > 2, (6)$, która wynika albo z zapamiętanego rozwinięcia dziesiętnego $e = 2,7\dots$, albo ze wzoru¹

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} > \sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}.$$

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg jest zbieżny.

¹Co prawda jeszcze o wzorze $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ nie mówiliśmy, ale jak ktoś go zna, to może w razie potrzeby zastosować.

171. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{2n}{n}^2}}{3^n}$$

jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Korzystamy z kryterium porównawczego, a następnie z kryterium d'Alemberta:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{2n}{n}^2}}{3^n} &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{0 + \binom{2n}{n}^2}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{3^n}, \\ \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{\binom{2n}{n}} &= \frac{(2n+2)! \cdot (n!)^2}{3 \cdot ((n+1)!)^2 \cdot (2n)!} = \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{3 \cdot (n+1)^2} \rightarrow \frac{4}{3} > 1, \end{aligned}$$

a zatem na mocy kryterium d'Alemberta szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{3^n}$ jest rozbieżny, a stąd na mocy

kryterium porównawczego rozbieżny jest także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{2n}{n}^2}}{3^n}$.

Odpowiedź: Podany szereg jest rozbieżny.

172. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2} \cdot n^{n^3}}.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy $a_n = \frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2} \cdot n^{n^3}}$ i zastosujmy kryterium Cauchy'ego do zbadania zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2} \cdot n^{n^3}}} = \frac{(n+1)^{n^2}}{2^n \cdot n^{n^2}} = b_n.$$

Ponieważ nie umiemy od razu stwierdzić, do czego dąży b_n przy $n \rightarrow \infty$, stosujemy ponownie kryterium Cauchy'ego, tym razem do ciągu (b_n) . Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{2^n \cdot n^{n^2}}} = \frac{(n+1)^n}{2 \cdot n^n} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{e}{2} > 1.$$

Z kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (b_n) wynika więc, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty.$$

Wobec tego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty > 1,$$

skąd na podstawie kryterium Cauchy'ego zastosowanego do szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wnioskujemy, że szereg ten jest rozbieżny.

173. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p+1}}, & (2, \infty) \\ \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^p+1}}, & (6, \infty) \\ \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt[4]{n^p+1}}, & (12, \infty) \\ \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt[5]{n^p+1}}, & (20, \infty) \end{array}$$

174. Dowieść, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

też jest zbieżny.

Wskazówka: Zastosować nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną do liczb a_n oraz $\frac{1}{n^2}$.

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$\sqrt{a_n \cdot \frac{1}{n^2}} \leq \frac{a_n + \frac{1}{n^2}}{2},$$

czyli

$$\frac{\sqrt{a_n}}{n} \leq \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2n^2}.$$

Ponieważ wiemy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

a z założeń zadania

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty,$$

dostajemy nierówności

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

175. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 9.$$

Udowodnić jedną z poniższych nierówności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq 5 \quad \text{(wersja łatwiejsza)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq 3 \quad \text{(wersja trudniejsza)}$$

Wskazówka: Skorzystać z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną.

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb a_n i b_n otrzymujemy

$$\sqrt{a_n \cdot b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5,$$

co kończy rozwiązanie łatwiejszej wersji zadania.

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb $9a_n$ i b_n otrzymujemy

$$\sqrt{9a_n \cdot b_n} \leq \frac{9a_n + b_n}{2},$$

czyli

$$\sqrt{a_n \cdot b_n} \leq \frac{9a_n + b_n}{6}.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3a_n}{2} + \frac{b_n}{6} \right) = \frac{3}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3,$$

co kończy rozwiązanie trudniejszej wersji zadania.

176. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leq 1.$$

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla trzech liczb a_n^6 , b_n^3 i b_n^3 otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n^6 b_n^3 b_n^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^6 + b_n^3 + b_n^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 \right) = \frac{1+1+1}{3} = 1.$$

177. Dany jest taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \leq 64.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq C,$$

gdzie $C = 27$ (wersja łatwiejsza) lub $C = 16$ (wersja trudniejsza).

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n a_n a_n^4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_n + a_n^4}{3} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \right) \leq \frac{8+8+64}{3} = \frac{80}{3} < \frac{81}{3} = 27 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n a_n a_n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{8a_n \cdot 8a_n \cdot a_n^4}}{4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8a_n + 8a_n + a_n^4}{3 \cdot 4} = \\ &= \frac{1}{12} \cdot \left(8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \right) \leq \frac{64+64+64}{12} = \frac{192}{12} = 16. \end{aligned}$$

178. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leq 2.$$

Rozwiązanie:

Korzystając z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną dla trzech liczb a_n^6 , $8b_n^3$ i $8b_n^3$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{a_n^6 \cdot 8b_n^3 \cdot 8b_n^3} \leq \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^6 + 8b_n^3 + 8b_n^3}{3} = \\ &= \frac{1}{12} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 + 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 + 8 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 \right) = \frac{8+8+8}{12} = 2. \end{aligned}$$