

Zadania do omówienia na konwersatorium w czwartek 21.04.2022.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami.

166. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^3+n} - n)$$

jest zbieżny.

167. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[4]{n^4+n} - n)$$

jest zbieżny.

168. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}).$$

169. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{28^n \cdot (n!)^3}.$$

170. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 18^n}{\binom{3n}{n} \cdot n^n}.$$

171. Rozstrzygnąć, czy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7^n + \binom{2n}{n}^2}}{3^n}$$

jest zbieżny.

172. Rozstrzygnąć zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^3}}{2^{n^2} \cdot n^{n^3}}.$$

173. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości parametru p , dla których podany szereg jest zbieżny.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^p+1}}, \dots\dots\dots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^p+1}}, \dots\dots\dots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt[4]{n^p+1}}, \dots\dots\dots$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt[5]{n^p+1}}, \dots\dots\dots$

174. Dowieść, że jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$$

też jest zbieżny.

Wskazówka: Zastosować nierówność między średnią geometryczną i arytmetyczną do liczb a_n oraz $\frac{1}{n^2}$.

175. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 9.$$

Udowodnić jedną z poniższych nierówności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq 5 \quad \text{(wersja łatwiejsza)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq 3 \quad \text{(wersja trudniejsza)}$$

Wskazówka: Skorzystać z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną.

176. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leq 1.$$

177. Dany jest taki szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^4 \leq 64.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq C,$$

gdzie $C = 27$ (wersja łatwiejsza) lub $C = 16$ (wersja trudniejsza).

178. Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^6 = 8 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 = 1.$$

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 \leq 2.$$