146. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty \frac{x^\pi\,dx}{\sqrt{x^9+x^8}}\,.$$

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{x^\pi\,dx}{\sqrt{x^9+x^8}}=\int_0^1 \frac{x^\pi\,dx}{\sqrt{x^9+x^8}}+\int_1^\infty \frac{x^\pi\,dx}{\sqrt{x^9+x^8}}\,.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^\pi\,dx}{\sqrt{x^9+x^8}}\leqslant\int_0^1 \frac{x^\pi\,dx}{\sqrt{0+x^8}}=\int_0^1 \frac{dx}{x^{4-\pi}}<+\infty\,,$$

bo $4-\pi<1$.

Podobnie

$$\int_1^\infty \frac{x^\pi\,dx}{\sqrt{x^9+x^8}}\leqslant\int_1^\infty \frac{x^\pi\,dx}{\sqrt{x^9+0}}=\int_1^\infty \frac{dx}{x^{4,5-\pi}}<+\infty\,,$$

bo $4,5-\pi>1$.

147. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty \frac{x^e\,dx}{x^4+x^3}\,.$$

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^\infty \frac{x^e\,dx}{x^4+x^3}=\int_0^1 \frac{x^e\,dx}{x^4+x^3}+\int_1^\infty \frac{x^e\,dx}{x^4+x^3}\,.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{x^e\,dx}{x^4+x^3}\leqslant\int_0^1 \frac{x^e\,dx}{0+x^3}=\int_0^1 \frac{dx}{x^{3-e}}<+\infty\,,$$

bo $3-e<1$.

Podobnie

$$\int_1^\infty \frac{x^e\,dx}{x^4+x^3}\leqslant\int_1^\infty \frac{x^e\,dx}{x^4+0}=\int_1^\infty \frac{dx}{x^{4-e}}<+\infty\,,$$

bo $4-e>1$.

148. Udowodnić zbieżność całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}}\, dx\,.$$

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}}\, dx = \int_0^{1} \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}}\, dx + \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}}\, dx\,.$$

Wykażemy, że każda z dwóch całek występujących w powyższej sumie jest zbieżna. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^{1} \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}}\, dx \leqslant \int_0^{1} \frac{\sqrt{3x^3+x^3}}{\sqrt[3]{0+x^7}}\, dx = 2\cdot \int_0^{1} \frac{dx}{x^{5/6}} < +\infty\,,$$

bo $5/6<1$.

Podobnie

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5+x^3}}{\sqrt[3]{x^{11}+x^7}}\, dx \leqslant \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^5+3x^5}}{\sqrt[3]{x^{11}+0}}\, dx = 2\cdot \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{7/6}} < +\infty\,,$$

bo $7/6>1$.

149. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których całka niewłaściwa

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}}\, dx$$

jest zbieżna.

Rozwiązanie:

Dzieląc przedział całkowania otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}}\, dx = \int_0^{1} \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}}\, dx + \int_1^{\infty} \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}}\, dx\,.$$

Zbadamy, dla których wartości parametru p całki występujące w powyższej sumie są zbieżne. W tym celu zauważymy, że funkcja podcałkowa jest dodatnia i skorzystamy z kryterium porównawczego dla całek niewłaściwych.

Otrzymujemy

$$\int_0^{1} \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}}\, dx \leqslant \int_0^{1} \frac{x^p}{\sqrt{0+x^3}}\, dx = \int_0^{1} \frac{dx}{x^{3/2-p}} < +\infty\,,$$

o ile $3/2-p<1$, czyli $p>1/2$.

Ponadto

$$\int_0^{1} \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}}\, dx \geqslant \int_0^{1} \frac{x^p}{\sqrt{x^3+x^3}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \int_0^{1} \frac{dx}{x^{3/2-p}} = +\infty\,,$$

o ile $3/2-p\geqslant 1$, czyli $p\leqslant 1/2$.

Podobnie

$$\int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}}\,dx \leqslant \int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^4+0}}\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^{2-p}} < +\infty\,,$$

o ile $2-p>1$, czyli $p<1$.

Ponadto

$$\int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^3}}\,dx \geqslant \int_1^\infty \frac{x^p}{\sqrt{x^4+x^4}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int_1^\infty \frac{dx}{x^{2-p}} = +\infty\,,$$

o ile $2-p\leqslant 1$, czyli $p\geqslant 1$.

Wniosek: Jeżeli $1/2<p<1$, to obydwie całki powstałe z podziału przedziału całkowania są zbieżne, a więc i wyjściowa całka jest zbieżna. W przeciwnym razie jedna z tych całek jest rozbieżna, a zatem wyjściowa całka jest rozbieżna.

Odpowiedź: Podana całka jest zbieżna dla $p\in(1/2,\,1)$.

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych, obliczyć wartości całek zbieżnych.

150. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x\cdot \ln x} = \textbf{Rozbieżna}$

151. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x\cdot (\ln x)^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\ln 2}}$

152. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x\cdot (\ln x)^{1001/1000}} = \frac{\mathbf{1000}}{\sqrt[\mathbf{1000}]{\mathbf{\ln 2}}}$

153. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{x\cdot \ln x\cdot \ln\ln x} = \textbf{Rozbieżna}$

154. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{x\cdot \ln x\cdot (\ln\ln x)^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\ln\ln 3}}$

155. $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x+1}-\sqrt{x}\,dx = \textbf{Rozbieżna}$

156. $\displaystyle\int_0^\infty x^8\cdot \sin x^9\,dx = \textbf{Rozbieżna}$

157. $\displaystyle\int_0^{32} \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} = \mathbf{20}$

158. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx = \mathbf{-1}$

159. $\displaystyle\int_1^\infty \sqrt[x]{x}\,dx = \textbf{Rozbieżna}$

160. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_4^\infty \frac{5x-2}{x^3+x^2-2x}\,dx$$

i po uproszczeniu wyniku określić, czy wartość ta jest większa czy mniejsza od 1.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że liczby 0 i 1 są miejscami zerowymi wielomianu sześciennego występującego w mianowniku funkcji podcałkowej, skąd otrzymujemy

$$x^3+x^2-2x=x\cdot(x-1)\cdot(x+2)\,.$$

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{5x-2}{x\cdot(x-1)\cdot(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}\,,$$

$$5x-2=A\cdot(x-1)\cdot(x+2)+B\cdot x\cdot(x+2)+C\cdot x\cdot(x-1)\,.$$

W tym momencie można wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B i C, porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

My jednak podstawimy za x wartości 0, 1 i -2 otrzymując odpowiednio

dla $x=0$ $\quad -2=-2A,\quad$ skąd $\quad A=1,$

dla $x=1$ $\quad 3=3B,\quad$ skąd $\quad B=1,$

dla $x=-2$ $\quad -12=6C,\quad$ skąd $\quad C=-2.$

Wobec tego

$$\int_4^\infty \frac{5x-2}{x^3+x^2-2x}\,dx=\int_4^\infty \frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}\,dx=\ln|x|+\ln|x-1|-2\cdot\ln|x+2|\Big|_{x=4}^{\infty}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}(\ln|x|+\ln|x-1|-2\cdot\ln|x+2|)\right)-\ln4-\ln3+2\cdot\ln6=\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x\cdot(x-1)}{(x+2)^2}\right)+\ln3=$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot(x-1)}{(x+2)^2}\right)+\ln3=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^2}\right)+\ln3=\ln1+\ln3=\ln3>\ln e=1\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\ln3>1$.

Uwaga: Całki

$$\int_4^\infty \frac{1}{x}\,dx,\qquad \int_4^\infty \frac{1}{x-1}\,dx,\qquad \int_4^\infty \frac{1}{x+2}\,dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x\to\infty}\ln|x|,\qquad \lim_{x\to\infty}\ln|x-1|,\qquad \lim_{x\to\infty}\ln|x+2|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty-\infty$.

161. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int\limits_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{16x^3+x}\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $\ln w$, gdzie w liczbą wymierną dodatnią.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x\cdot(16x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{16x^2+1}\,,$$

$$1=A\cdot\left(16x^2+1\right)+(Bx+C)\cdot x\,,$$

$$1=16Ax^2+A+Bx^2+Cx\,,$$

$$1=A, \qquad 0=C, \qquad 0=16A+B\,,$$

$$A=1, \qquad B=-16, \qquad C=0\,.$$

Wobec tego[1]

$$\int\limits_{1/3}^{\infty} \frac{dx}{x\cdot(16x^2+1)}=\int\limits_{1/3}^{\infty} \frac{1}{x}-\frac{16x}{16x^2+1}\,dx=\left(\ln|x|-\frac{1}{2}\cdot\ln\left(16x^2+1\right)\right)\Bigg|_{x=1/3}^{\infty}=$$

$$=\ln\sqrt{\frac{x^2}{16x^2+1}}\,\Bigg|_{x=1/3}^{\infty}=\left(\lim_{x\to\infty}\ln\sqrt{\frac{x^2}{16x^2+1}}\right)-\ln\sqrt{\frac{1/9}{\frac{16}{9}+1}}=\ln\sqrt{\frac{1}{16}}-\ln\sqrt{\frac{1}{16+9}}=$$

$$=\ln\frac{1}{4}-\ln\frac{1}{5}=\ln\frac{5}{4}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\ln\frac{5}{4}$.

Uwaga: Całki

$$\int\limits_{1/3}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx, \qquad \int\limits_{1/3}^{\infty} \frac{x}{16x^2+1}\,dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x\to\infty}\ln|x|, \qquad \lim_{x\to\infty}\ln\left(16x^2+1\right)$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty-\infty$.

Odpowiednie poradzenie sobie z przejściem granicznym jest kluczową częścią zadania. Bez tego elementu, nawet przy poprawnym wyniku liczbowym, zadanie nie może zostać uznane za rozwiązane.

[1] Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.

162. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{7}^{\infty} \frac{dx}{x^3+x}$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{(x^2+1)\cdot x} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x},$$

$$1 = (Ax+B)\cdot x + C\cdot \left(x^2+1\right),$$

$$1 = Ax^2 + Bx + Cx^2 + C,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+C \\ 0 &= B \\ 1 &= C \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $A=-1$.

Wobec tego

$$\int_{7}^{\infty} \frac{dx}{x^3+x} = \int_{7}^{\infty} -\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x}\, dx = -\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \ln|x| \Bigg|_{x=7}^{\infty} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} \left(-\frac{\ln(x^2+1)}{2} + \ln x\right)\right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \left(\lim_{x\to\infty} \ln\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}\right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 =$$

$$= \left(\ln \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+x^{-2}}}\right) + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \ln 1 + \frac{\ln 50}{2} - \ln 7 = \frac{\ln 50}{2} - \ln 7.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 50}{2} - \ln 7$.

Uwaga: Poprawne wykonanie przejścia granicznego jest istotną częścią zadania. Bez tego zadanie nie może być uzanane za rozwiązane nawet przy poprawnym wyniku liczbowym.

163. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{6}^{\infty} \frac{3x+2}{x^3-4x}\, dx$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{3x+2}{x^3-4x} = \frac{3x+2}{(x-2)\cdot x\cdot (x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+2},$$

$$3x+2 = A\cdot x\cdot (x+2) + B\cdot (x-2)\cdot (x+2) + C\cdot (x-2)\cdot x. \qquad (\heartsuit)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości (♡), a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B, C.

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości (♡) kolejno $x=2$, $x=0$, $x=-2$ otrzymując odpowiednio

$$\begin{aligned} 8=8A, &\quad \text{skąd} \quad A=1\,, \\ 2=-4B, &\quad \text{skąd} \quad B=-\frac{1}{2}\,, \\ -4=8C, &\quad \text{skąd} \quad C=-\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_6^\infty \frac{3x+2}{x^3-4x}\,dx &= \int_6^\infty \frac{1}{x-2}-\frac{1/2}{x}-\frac{1/2}{x+2}\,dx = \ln|x-2|-\frac{\ln|x|}{2}-\frac{\ln|x+2|}{2}\bigg|_{x=6}^{\infty} = \\ &= \left(\lim_{x\to\infty}\left(\ln|x-2|-\frac{\ln|x|}{2}-\frac{\ln|x+2|}{2}\right)\right)-\ln4+\frac{\ln6}{2}+\frac{\ln8}{2} = \\ &= \left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x-2}{\sqrt{x\cdot(x+2)}}\right)+\frac{-2\cdot\ln4+\ln6+\ln8}{2} = \\ &= \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x\cdot(x+2)}}\right)+\frac{-4\cdot\ln2+\ln2+\ln3+3\cdot\ln2}{2} = \\ &= \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}\right)+\frac{\ln3}{2} = \ln1+\frac{\ln3}{2} = 0+\frac{\ln3}{2} = \frac{\ln3}{2}\,. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\dfrac{\ln3}{2}$.

164. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_5^\infty \frac{2x+3}{x^3-9x}\,dx$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{2x+3}{x^3-9x} = \frac{2x+3}{(x-3)\cdot x\cdot(x+3)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+3}\,,$$

$$2x+3 = A\cdot x\cdot(x+3)+B\cdot(x-3)\cdot(x+3)+C\cdot(x-3)\cdot x\,. \qquad (\heartsuit)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości (♡), a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B, C.

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości (♡) kolejno $x=3$, $x=0$, $x=-3$ otrzymując odpowiednio

$$9=18A, \quad \text{skąd} \quad A=\frac{1}{2},$$
$$3=-9B, \quad \text{skąd} \quad B=-\frac{1}{3},$$
$$-3=18C, \quad \text{skąd} \quad C=-\frac{1}{6}.$$

Wobec tego

$$\int_5^\infty \frac{2x+3}{x^3-9x}\,dx=\int_5^\infty \frac{1/2}{x-3}-\frac{1/3}{x}-\frac{1/6}{x+3}\,dx=\left.\frac{\ln|x-3|}{2}-\frac{\ln|x|}{3}-\frac{\ln|x+3|}{6}\right|_{x=5}^{\infty}=$$
$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln|x-3|}{2}-\frac{\ln|x|}{3}-\frac{\ln|x+3|}{6}\right)\right)-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 5}{3}+\frac{\ln 8}{6}=$$
$$=\left(\lim_{x\to\infty}\ln\sqrt[6]{\frac{(x-3)^3}{x^2\cdot(x+3)}}\right)-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 5}{3}+\frac{\ln 2}{2}=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\sqrt[6]{\frac{(x-3)^3}{x^2\cdot(x+3)}}\right)+\frac{\ln 5}{3}=$$
$$=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\sqrt[6]{\frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)^3}{1+\frac{3}{x}}}\right)+\frac{\ln 5}{3}=\ln 1+\frac{\ln 5}{3}=0+\frac{\ln 5}{3}=\frac{\ln 5}{3}.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\frac{\ln 5}{3}$.

165. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_4^\infty \frac{dx}{x\cdot(x+2)\cdot(x+5)}.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\ln\frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami pierwszymi, a w liczbą wymierną dodatnią.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x\cdot(x+2)\cdot(x+5)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+5},$$
$$1=A\cdot(x+2)\cdot(x+5)+B\cdot x\cdot(x+5)+C\cdot x\cdot(x+2).$$

Podstawiamy[2] za x wartości 0, -2 i -5 otrzymując odpowiednio

dla $x=0$ $\quad 1=10\cdot A,\quad$ skąd $\quad A=1/10,$

dla $x=-2$ $\quad 1=-6\cdot B,\quad$ skąd $\quad B=-1/6,$

[2]Można też wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B i C, porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

dla $x=-5$ $\qquad 1=15\cdot C,\qquad$ skąd $\qquad C=1/15.$

Wobec tego[3]

$$\int_4^{\infty}\frac{dx}{x\cdot(x+2)\cdot(x+5)}=\int_4^{\infty}\frac{1/10}{x}-\frac{1/6}{x+2}+\frac{1/15}{x+5}\,dx=$$

$$=\frac{1}{30}\cdot(3\cdot\ln|x|-5\cdot\ln|x+2|+2\cdot\ln|x+5|)\Big|_{x=4}^{\infty}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{30}\cdot(3\cdot\ln|x|-5\cdot\ln|x+2|+2\cdot\ln|x+5|)\right)\right)-\frac{1}{30}\cdot(3\cdot\ln4-5\cdot\ln6+2\cdot\ln9)=$$

$$=\frac{1}{30}\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^3\cdot(x+5)^2}{(x+2)^5}\right)-\frac{1}{30}\cdot(6\cdot\ln2-5\cdot\ln2-5\cdot\ln3+4\cdot\ln3)=$$

$$=\frac{1}{30}\cdot\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{5}{x}\right)^2}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^5}\right)-\frac{1}{30}\cdot(\ln2-\ln3)=\frac{1}{30}\cdot\ln1+\frac{1}{30}\cdot(\ln3-\ln2)=\frac{1}{30}\cdot\ln\frac{3}{2}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\frac{1}{30}\cdot\ln\frac{3}{2}$.

Uwaga: Całki

$$\int_4^{\infty}\frac{1}{x}\,dx,\qquad \int_4^{\infty}\frac{1}{x+2}\,dx,\qquad \int_4^{\infty}\frac{1}{x+5}\,dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x\to\infty}\ln|x|,\qquad \lim_{x\to\infty}\ln|x+2|,\qquad \lim_{x\to\infty}\ln|x+5|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty-\infty$.

[3]Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.