

**121.** Obliczyć całkę

$$\int_0^1 x^3 dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkownia na równe części (wersja 4 z wykładu 6, strona 64).

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

*Rozwiązanie:*

Dla funkcji określonej na przedziale  $[0, 1]$  wzór z wersji 4 przybiera postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Wobec tego<sup>1</sup>

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^4} \cdot \sum_{k=1}^n k^3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} \right) = \frac{1}{4}.$$

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{4}.$$

**122.** Obliczyć całkę

$$\int_0^1 2^x dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkownia na równe części (wersja 4).

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

*Rozwiązanie:*

Dla funkcji określonej na przedziale  $[0, 1]$  wzór z wersji 4 przybiera postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Wobec tego<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^1 2^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n 2^{k/n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot 2^{1/n} \cdot \frac{(2^{1/n})^n - 1}{2^{1/n} - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot 2^{1/n} \cdot \frac{2 - 1}{2^{1/n} - 1} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \frac{2^{1/n}}{2^{1/n} - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2^{1/n} \cdot \frac{1/n}{2^{1/n} - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{1/n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2^{1/n} - 1} = 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2^{1/n} - 1} = \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Korzystamy po drodze ze wzoru  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$ .

<sup>2</sup>Korzystamy po drodze ze wzoru na sumę postępu geometrycznego.

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2^{1/n} - 1}.$$

Jeżeli istnieje granica (funkcji)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2^x - 1},$$

to istnieje również granica (ciągu)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{2^{1/n} - 1}$$

i są one równe. Korzystając z reguły de l'Hospitala otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2^x \cdot \ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$$

i tyle właśnie wynosi wartość szukanej całki.

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_{x=0}^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

### 123. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum całkowych Riemanna.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

*Rozwiązanie:*

Najpierw pokażę, w jaki sposób można naiwnie próbować rozwiązać to zadanie i dlaczego to się nie udaje.

Dla funkcji ciągłej  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  i ciągu podziałów przedziału na równe części, interesując nas wzór ogólny przybiera postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Wobec tego

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \right).$$

Trudnością, jaką napotykamy w tym momencie, jest brak wzoru, który pozwoliłby wyrazić sumę

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$$

w prostej postaci pozwalającej na przejście graniczne.

No cóż, naiwnie sądziliśmy, że najłatwiej będzie wybrać możliwie najprostszy ciąg podziałów przedziału całkowania, a mianowicie podziały na równe części. Ale co nam

z tego, że sam podział jest ładny, skoro funkcja podcałkowa w punktach podziału przyjmuje wartości wykluczające zwinięcie otrzymanej sumy do prostej postaci.

Musimy więc zmienić nasze priorytety. Nieważne, czy przedziałki podziału są równe, czy nie. Przede wszystkim wartości funkcji podcałkowej w punktach podziału muszą być możliwie najprostsze. Ponieważ w rozważanym przykładzie funkcją podcałkową jest pierwiastek kwadratowy, punktami podziału powinny być liczby, których pierwiastki kwadratowe są liczbami wymiernymi, a jeszcze lepiej, jeśli nie będą to byle jakie liczby wymierne chaotycznie rozmieszczone, ale liczby wymierne tworzące w miarę regularny ciąg<sup>3</sup>, na przykład ciąg arytmetyczny.

To prowadzi do pomysłu, aby za punkty  $n$ -tego podziału przyjąć kwadraty liczb wymiernych tworzących skończony ciąg arytmetyczny. Oczywiście taki, aby zerowy punkt podziału był lewym, a  $n$ -ty prawym końcem przedziału całkowania, czyli

$$x_{n,k} = \frac{k^2}{n^2}.$$

Zastosowanie ma wersja 3 ( $n$ -ty podział na  $n$  części,  $y$ -ki w prawych końcach):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( (x_{n,k} - x_{n,k-1}) \cdot f(x_{n,k}) \right). \quad (\clubsuit)$$

W naszym wypadku

$$a = 0, \quad b = 1, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad x_{n,k} = \frac{k^2}{n^2},$$

skąd po podstawieniu powyższych danych do wzoru ( $\clubsuit$ ) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \left( \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k-1)^2}{n^2} \right) \cdot \sqrt{\frac{k^2}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \left( \frac{2k-1}{n^2} \right) \cdot \frac{k}{n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^n (2k^2 - k) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^3} \cdot \left( 2 \cdot \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \right) \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^3} \cdot \left( \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{3} - \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1) \cdot (2n+1)}{3n^2} - \frac{n+1}{2n^2} \right) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Sprawdzenie:

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \Big|_{x=0}^1 = \frac{2}{3}.$$

**124.** Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^3}{5k^4 + n^4}.$$

*Rozwiązanie:*

---

<sup>3</sup>Tu mamy na myśli ciąg skończony, ale słowo "skończony" pomijamy, aby nie zaburzać płynności i tak już rozbudowanego zdania.

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{k^3}{5k^4 + n^4} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} \frac{(k/n)^3}{5(k/n)^4 + 1} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie  $f(x) = \frac{x^3}{5x^4 + 1}$ .

Ponieważ funkcja  $f$  jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na przedziały równej długości dążą do całki oznaczonej:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \frac{x^3}{5x^4 + 1} dx = \frac{1}{20} \cdot \int_0^2 \frac{20x^3}{5x^4 + 1} dx = \\ &= \frac{\ln(5x^4 + 1)}{20} \Bigg|_{x=0}^2 = \frac{\ln 81 - \ln 1}{20} = \frac{4 \ln 3}{20} = \frac{\ln 3}{5}, \end{aligned}$$

gdzie po drodze skorzystaliśmy ze wzoru

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C.$$

Otrzymujemy więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^3}{5k^4 + n^4} = \frac{\ln 3}{5}.$$

W każdym z kolejnych dziesięciu zadań podaj w postaci uproszczonej wartość granicy ciągu.

$$125. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{2n+k} + \dots + \frac{1}{6n} \right) = \ln 3$$

$$126. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+6} + \dots + \frac{1}{n+2k} + \dots + \frac{1}{9n} \right) = \ln 3$$

$$127. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+8} + \frac{1}{n+12} + \dots + \frac{1}{n+4k} + \dots + \frac{1}{81n} \right) = \ln 3$$

$$128. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n^2+(n+1)^2} + \frac{n+2}{n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{k}{n^2+k^2} + \dots + \frac{7n}{50n^2} \right) = \ln 5$$

$$129. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{2n^2+(n+1)^2} + \frac{n+2}{2n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{k}{2n^2+k^2} + \dots + \frac{5n}{27n^2} \right) = \ln 3$$

$$130. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3n^2+1} + \frac{2}{3n^2+4} + \dots + \frac{k}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{3n}{12n^2} \right) = \ln 2$$

$$131. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \dots + \frac{n}{n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{2n^2} \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$132. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+4} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{4n^2} \right) = \frac{\pi}{6 \cdot \sqrt{3}} \quad \left( = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{18} \right)$$

$$133. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{3n^2+1} + \frac{n}{3n^2+4} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \frac{\pi}{3 \cdot \sqrt{3}} \quad \left( = \frac{\pi \cdot \sqrt{3}}{9} \right)$$

$$134. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{3n^2+(n+1)^2} + \frac{n}{3n^2+(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{3n^2+k^2} + \dots + \frac{n}{12n^2} \right) = \frac{\pi}{6 \cdot \sqrt{3}}$$

**135.** Obliczyć długość krzywej

$$\left\{ \left( x, \frac{2}{3} \cdot x^{3/2} \right) : x \in [0, 15] \right\}.$$

*Rozwiązanie:*

Zgodnie ze wzorem na długość krzywej będącej wykresem funkcji  $f(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{3/2}$  na przedziale  $[a, b] = [0, 15]$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &= \int_0^{15} \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} dx = \int_0^{15} \sqrt{1+x} dx = \frac{2 \cdot (x+1)^{3/2}}{3} \Big|_{x=0}^{15} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot (64 - 1) = \frac{2}{3} \cdot 63 = 42. \end{aligned}$$

*Odpowiedź:*

Dana w zadaniu krzywa ma długość 42.

**136.** Obliczyć długość krzywej

$$\left\{ (x, x^{3/2}) : x \in [0, 13] \right\}.$$

*Rozwiązanie:*

Zgodnie ze wzorem na długość krzywej będącej wykresem funkcji  $f(x) = x^{3/2}$  na przedziale  $[a, b] = [0, 13]$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx &= \int_0^{13} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^{13} \sqrt{1 + \frac{9}{4} \cdot x} dx = \frac{8 \cdot \left(\frac{9}{4} \cdot x + 1\right)^{3/2}}{27} \Big|_{x=0}^{13} = \\ &= \frac{8}{27} \cdot \left( \left(\frac{9 \cdot 13 + 4}{4}\right)^{3/2} - 1 \right) = \frac{8}{27} \cdot \left( \left(\frac{117 + 4}{4}\right)^{3/2} - 1 \right) = \frac{8}{27} \cdot \left( \left(\frac{121}{4}\right)^{3/2} - 1 \right) = \\ &= \frac{8}{27} \cdot \left( \frac{1331}{8} - 1 \right) = \frac{1331 - 8}{27} = \frac{1323}{27} = \frac{1350 - 27}{27} = \frac{2700 - 27}{27} = \frac{100}{2} - 1 = 49. \end{aligned}$$

**Odpowiedź:** Dana w zadaniu krzywa ma długość 49.

**137.** Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  spełniają nierówność

$$f(x) \leq g(x)$$

dla każdego  $x \in [a, b]$ , to środek ciężkości figury

$$\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

leży w punkcie  $\left(\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}\right)$ , gdzie

$$X = \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx, \quad Y = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 dx, \quad P = \int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego parabolą o równaniu  $y = x^2$  i prostą o równaniu  $y = x$ .

*Rozwiązanie:*

Ponieważ dane w zadaniu parabola i prosta przecinają się w punktach  $(0, 0)$  i  $(1, 1)$ , a przy tym  $x^2 \leq x$  dla  $x \in [0, 1]$ , przeprowadzamy obliczenia dla  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $f(x) = x^2$  oraz  $g(x) = x$ . Otrzymujemy kolejno:

$$X = \int_0^1 x \cdot (x - x^2) dx = \int_0^1 x^2 - x^3 dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^2 - x^4 dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5-3}{30} = \frac{1}{15},$$

$$P = \int_0^1 x - x^2 dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

W rezultacie współrzędne środka ciężkości danej figury to  $X/P = (1/12)/(1/6) = 1/2$  oraz  $Y/P = (1/15)/(1/6) = (2/5)$ .

*Odpowiedź:*

Środek ciężkości danej figury leży w punkcie  $(1/2, 2/5)$ .

**138.** Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  spełniają nierówność

$$f(x) \leq g(x)$$

dla każdego  $x \in [a, b]$ , to środek ciężkości figury

$$\{(x, y) : x \in [a, b] \wedge f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

leży w punkcie  $\left(\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}\right)$ , gdzie

$$X = \int_a^b x \cdot (g(x) - f(x)) dx, \quad Y = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 dx, \quad P = \int_a^b g(x) - f(x) dx.$$

Wyznaczyć środek ciężkości  $(x_n, y_n)$  obszaru  $Z_n$  ograniczonego prostą o równaniu  $y = x$  i krzywą o równaniu  $y = |x| \cdot \sqrt[n]{|x|}$ .

Obliczyć graniczne wartości  $x_G = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  oraz  $y_G = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Jakiej zależności między  $x_G$  i  $y_G$  powinniśmy oczekiwać i dlaczego?

*Rozwiązanie:*

Ponieważ dane w zadaniu krzywa i prosta przecinają się w punktach  $(0, 0)$  i  $(1, 1)$ , a przy tym  $|x| \cdot \sqrt[n]{|x|} \leq x$  dla  $x \in [0, 1]$ , przeprowadzamy obliczenia dla  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $f(x) = x^{(n+1)/n}$  oraz  $g(x) = x$ . Otrzymujemy kolejno:

$$X = \int_0^1 x \cdot (x - x^{(n+1)/n}) dx = \int_0^1 x^2 - x^{(2n+1)/n} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{(3n+1)/n}}{(3n+1)/n} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{3} - \frac{n}{3n+1} =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot (3n+1)},$$

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x^2 - x^{2(n+1)/n} dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^{(3n+2)/n}}{2 \cdot (3n+2)/n} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{6} - \frac{n}{2 \cdot (3n+2)} = \frac{1}{3 \cdot (3n+2)},$$

$$P = \int_0^1 x - x^{(n+1)/n} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^{(2n+1)/n}}{(2n+1)/n} \Big|_{x=0}^1 = \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2 \cdot (2n+1)}.$$

W rezultacie współrzędne środka ciężkości figury  $Z_n$  to

$$x_n = \frac{X}{P} = \frac{2 \cdot (2n+1)}{3 \cdot (3n+1)} \quad \text{oraz} \quad y_n = \frac{Y}{P} = \frac{2 \cdot (2n+1)}{3 \cdot (3n+2)}.$$

Wobec tego  $x_G = y_G = 4/9$ .

Dla bardzo dużych  $n$  obszar  $Z_n$  jest nieznacznie pogrubionym odcinkiem o końcach  $(0, 0)$  i  $(1, 1)$ , więc należy oczekiwać, że jego środek ciężkości leży bardzo blisko tego odcinka. W konsekwencji **należy oczekiwać, że  $x_G = y_G$** .

**139.** Pomarańczę o cieniejszej skórce pokrojono na plasterki równej grubości. Które plasterki mają więcej skórki: te bliżej równika, czy te bliżej biegunów?  
Potrzebny wzór na pole powierzchni obrotowej odszukaj w notatkach z wykładu.

*Odpowiedź:*

Wszystkie plastry zawierają tyle samo skórki.

**140.** Dane są dwie sfery o różnych promieniach. Dysponujemy cyrklem o stałym rozwarciu mniejszym od promienia mniejszej sfery. Na każdej ze sfer rysujemy tym cyrklem okrąg. Na której sferze narysowany okrąg ogranicza większe pole?  
Potrzebny wzór na pole powierzchni obrotowej odszukaj w notatkach z wykładu.

*Odpowiedź:*

Pole ograniczone okręgiem nie zależy od promienia sfery, a jedynie od rozwarcia cyrkla użytego do narysowania okręgu. Takie samo jest pole koła narysowanego na płaszczyźnie. Pole całej sfery jest równe polu koła o promieniu równym średnicy sfery – na sferze rysujemy to tak: nóżka cyrkla w jednym biegunie, ołówek ślizga się po drugim biegunie. Natomiast półsfera powstaje przez umieszczenie nóżki na biegunie i narysowanie równika – zastanów się jaki jest wówczas rozstaw cyrkla i sprawdź, że pole się zgadza.

**141.** Obliczyć pole powierzchni obrotowej (torusa) powstałej przez obrót okręgu o równaniu

$$(x-2)^2 + y^2 = 1$$

wokół osi  $OY$ .

Pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej  $\{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ , gdzie  $0 \leq a < b$  oraz  $f \in C^1([a, b])$ , wokół osi  $OY$  jest równe

$$2\pi \cdot \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$



W rozwiązaniu może się też przydać wzór  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$ .

*Rozwiązanie:*

Przekształcanie równania obracanego okręgu prowadzi kolejno do:

$$y^2 = 1 - (x-2)^2,$$

$$y = \pm \sqrt{1 - (x-2)^2}.$$

Przy tym  $x$  może przebiegać przedział  $[1, 3]$ .

Okrąg rozdziela się więc w naturalny sposób na dwa półokręgi, o równaniach

$$y = \sqrt{1 - (x-2)^2} \quad \text{oraz} \quad y = -\sqrt{1 - (x-2)^2}.$$

Ponieważ każdy z tych półokręgów tworzy przy obrocie powierzchnię obrotową o takim samym polu, możemy wyliczyć pole powierzchni powstałej przez obrót jednego z nich, a otrzymany wynik pomnożyć przez 2.

Aby skorzystać z podanego wzoru, przyjmujemy  $[a, b] = [1, 3]$  i  $f(x) = \sqrt{1 - (x-2)^2}$ . Wówczas

$$f'(x) = \frac{-(x-2)}{\sqrt{1 - (x-2)^2}}.$$

Zatem szukane pole jest równe

$$2 \cdot 2\pi \cdot \int_1^3 x \cdot \sqrt{1 + \frac{(x-2)^2}{1 - (x-2)^2}} dx.$$

Obliczamy je wykonując podstawienie  $t = x - 2$ :

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2\pi \cdot \int_1^3 x \cdot \sqrt{1 + \frac{(x-2)^2}{1 - (x-2)^2}} dx &= 4\pi \cdot \int_{-1}^1 (t+2) \cdot \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} dt = 4\pi \cdot \int_{-1}^1 (t+2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \\ &= 4\pi \cdot \int_{-1}^1 t \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt + 8\pi \cdot \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt. \end{aligned}$$

Ponieważ pierwsza całka w ostatniej sumie jest równa 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera, kontynuujemy obliczanie drugiej całki:

$$8\pi \cdot \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 8\pi \cdot \arcsin t \Big|_{t=-1}^1 = 8\pi \cdot (\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = 8\pi \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = 8\pi^2.$$

*Odpowiedź:* Pole torusa jest równe  $8\pi^2$ .

*Uwaga:* Nieprzypadkowo pole torusa jest iloczynem długości obracanego okręgu przez drogę określaną przy obrocie przez środek (czyli środek ciężkości) tego okręgu (twierdzenie Pappusa-Guldina).

**142.** Gdzie leży środek ciężkości półsfery?

Potrzebny wzór na położenie środka ciężkości odszukaj w notatkach z wykładu.

*Odpowiedź:*

W połowie wysokości.

**143.** Gdzie leży środek ciężkości półkuli?

Potrzebny wzór na położenie środka ciężkości odszukaj w notatkach z wykładu.

*Odpowiedź:*

W  $3/8$  wysokości.

**144.** Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq \frac{1}{3} \right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

Potrzebny wzór na położenie środka ciężkości odszukaj w notatkach z wykładu.

*Rozwiązanie:*

Zdefiniowany w treści zadania odcinek kuli powstaje przez obrót obszaru

$$\left\{ (x, y) : \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

wokół osi OX. Jego środek ciężkości leży więc w punkcie  $(x_s, 0, 0)$ , gdzie

$$x_s = \frac{\pi \cdot \int_{1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx}{\pi \cdot \int_{1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx}.$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} \int_{1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx &= \int_{1/3}^1 x - x^3 dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \Big|_{x=1/3}^1 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{18} + \frac{1}{324} = \frac{162 - 81 - 18 + 1}{324} = \frac{64}{324} = \frac{16}{81} \end{aligned}$$

oraz

$$\int_{1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \int_{1/3}^1 1 - x^2 dx = x - \frac{x^3}{3} \Big|_{x=1/3}^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{81} = \frac{81 - 27 - 27 + 1}{81} = \frac{28}{81},$$

skąd

$$x_s = \frac{16/81}{28/81} = \frac{4}{7}.$$

**Odpowiedź:** Środek ciężkości odcinka kuli zdefiniowanego w treści zadania leży w punkcie  $\left(\frac{4}{7}, 0, 0\right)$ .

145. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge x \geq -\frac{1}{3} \right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

Potrzebny wzór na położenie środka ciężkości odszukaj w notatkach z wykładu.

*Rozwiązanie:*

Zdefiniowany w treści zadania odcinek kuli powstaje przez obrót obszaru

$$\left\{ (x, y) : -\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

wokół osi OX. Jego środek ciężkości leży więc w punkcie  $(x_s, 0, 0)$ , gdzie

$$x_s = \frac{\pi \cdot \int_{-1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx}{\pi \cdot \int_{-1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx}.$$

Obliczamy:

$$\begin{aligned} \int_{-1/3}^1 x \cdot (\sqrt{1-x^2})^2 dx &= \int_{-1/3}^1 x - x^3 dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \Big|_{x=-1/3}^1 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{18} + \frac{1}{324} = \frac{162 - 81 - 18 + 1}{324} = \frac{64}{324} = \frac{16}{81} \end{aligned}$$

oraz

$$\int_{-1/3}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \int_{-1/3}^1 1 - x^2 dx = x - \frac{x^3}{3} \Big|_{x=-1/3}^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{81} = \frac{81 - 27 + 27 - 1}{81} = \frac{80}{81},$$

skąd

$$x_s = \frac{16/81}{80/81} = \frac{1}{5}.$$

**Odpowiedź:** Środek ciężkości odcinka kuli zdefiniowanego w treści zadania leży w punkcie  $\left(\frac{1}{5}, 0, 0\right)$ .