Zadania 121–134 do omówienia na ćwiczeniach[1]
we wtorek/środę 5/6.04.2022.

Zadania 135–145 do omówienia na konwersatorium[2]
w czwartek 7.04.2022.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami.

121. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 x^3\,dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkownia na równe części (wersja 4 z wykładu 6, strona 64).

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

122. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 2^x\,dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum Riemanna odpowiadających podziałom przedziału całkownia na równe części (wersja 4).

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

123. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

poprzez obliczenie granicy ciągu sum całkowych Riemanna.

Potem (a nie przedtem !!!) obliczyć wartość całki przez bezpośrednie całkowanie i porównać wyniki.

124. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^3}{5k^4+n^4}\,.$$

[1]Na pierwszej godzinie ćwiczeń będzie kolokwium, tak więc na omawianie zadań z niniejszej listy zostaną dwie godziny.

[2]Przewiduję, że zajęcia czwartkowe 7 kwietnia zaczniemy od konwersatorium, które potrwa około dwóch godzin, a na trzeciej godzinie zrobimy wykład.

W każdym z kolejnych dziesięciu zadań podaj **w postaci uproszczonej** wartość granicy ciągu.

125. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+k}+\ldots+\frac{1}{6n}\right)=$ ....

126. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+6}+\ldots+\frac{1}{n+2k}+\ldots+\frac{1}{9n}\right)=$ ....

127. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+8}+\frac{1}{n+12}+\ldots+\frac{1}{n+4k}+\ldots+\frac{1}{81n}\right)=$ ....

128. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+(n+1)^2}+\frac{n+2}{n^2+(n+2)^2}+\ldots+\frac{k}{n^2+k^2}+\ldots+\frac{7n}{50n^2}\right)=$ ....

129. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n^2+(n+1)^2}+\frac{n+2}{2n^2+(n+2)^2}+\ldots+\frac{k}{2n^2+k^2}+\ldots+\frac{5n}{27n^2}\right)=$ ....

130. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n^2+1}+\frac{2}{3n^2+4}+\ldots+\frac{k}{3n^2+k^2}+\ldots+\frac{3n}{12n^2}\right)=$ ....

131. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\ldots+\frac{n}{n^2+k^2}+\ldots+\frac{n}{2n^2}\right)=$ ....

132. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n^2+1}+\frac{n}{3n^2+4}+\ldots+\frac{n}{3n^2+k^2}+\ldots+\frac{n}{4n^2}\right)=$ ....

133. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n^2+1}+\frac{n}{3n^2+4}+\ldots+\frac{n}{3n^2+k^2}+\ldots+\frac{n}{12n^2}\right)=$ ....

134. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n^2+(n+1)^2}+\frac{n}{3n^2+(n+2)^2}+\ldots+\frac{n}{3n^2+k^2}+\ldots+\frac{n}{12n^2}\right)=$ ....

135. Obliczyć długość krzywej

$$\left\{\left(x,\ \frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\right):\ x\in[0,\ 15]\right\}.$$

136. Obliczyć długość krzywej

$$\left\{\left(x,\ x^{3/2}\right):\ x\in[0,\ 13]\right\}.$$

137. Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f,\ g:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ spełniają nierówność

$$f(x)\leqslant g(x)$$

dla każdego $x\in[a,\ b]$, to środek ciężkości figury

$$\{(x,\ y):\ x\in[a,\ b]\ \wedge\ f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$$

leży w punkcie $\left(\frac{X}{P},\ \frac{Y}{P}\right)$, gdzie

$$X=\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\ dx\,,\qquad Y=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b (g(x))^2-(f(x))^2\ dx\,,\qquad P=\int_a^b g(x)-f(x)\,dx\,.$$

Wyznaczyć środek ciężkości obszaru ograniczonego parabolą o równaniu $y=x^2$ i prostą o równaniu $y=x$.

138. Wiadomo, że jeżeli funkcje ciągłe $f,\ g:[a,\ b]\to\mathbb{R}$ spełniają nierówność

$$f(x)\leqslant g(x)$$

dla każdego $x\in[a,\ b]$, to środek ciężkości figury

$$\{(x,\ y):\ x\in[a,\ b]\ \wedge\ f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$$

leży w punkcie $\left(\frac{X}{P},\ \frac{Y}{P}\right)$, gdzie

$$X=\int_a^b x\cdot(g(x)-f(x))\ dx\,,\qquad Y=\frac{1}{2}\cdot\int_a^b (g(x))^2-(f(x))^2\ dx\,,\qquad P=\int_a^b g(x)-f(x)\,dx\,.$$

Wyznaczyć środek ciężkości $(x_n,\ y_n)$ obszaru Z_n ograniczonego prostą o równaniu $y=x$ i krzywą o równaniu $y=|x|\cdot\sqrt[n]{|x|}$.

Obliczyć graniczne wartości $x_G=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ oraz $y_G=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. Jakiej zależności między x_G i y_G powinniśmy oczekiwać i dlaczego?

139. Pomarańczę o cienkiej skórce pokrojono na plasterki równej grubości. Które plasterki mają więcej skórki: te bliżej równika, czy te bliżej biegunów?
Potrzebny wzór na pole powierzchni obrotowej odszukaj w notatkach z wykładu.

140. Dane są dwie sfery o różnych promieniach. Dysponujemy cyrklem o stałym rozwarciu mniejszym od promienia mniejszej sfery. Na każdej ze sfer rysujemy tym cyrklem okrąg. Na której sferze narysowany okrąg ogranicza większe pole?
Potrzebny wzór na pole powierzchni obrotowej odszukaj w notatkach z wykładu.

141. Obliczyć pole powierzchni obrotowej (torusa) powstałej przez obrót okręgu o równaniu

$$(x-2)^2+y^2=1$$

wokół osi OY.

Pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej $\{(x,\,f(x)):\,x\in[a,\,b]\}$, gdzie $0\leqslant a<b$ oraz $f\in C^1([a,\,b])$, wokół osi OY jest równe

$$2\pi\cdot\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,.$$

W rozwiązaniu może się też przydać wzór $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x+C$.

142. Gdzie leży środek ciężkości półsfery?
Potrzebny wzór na położenie środka ciężkości odszukaj w notatkach z wykładu.

143. Gdzie leży środek ciężkości półkuli?
Potrzebny wzór na położenie środka ciężkości odszukaj w notatkach z wykładu.

144. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{(x,\,y,\,z):\;x^2+y^2+z^2\leqslant 1\;\wedge\;x\geqslant\frac{1}{3}\right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

Potrzebny wzór na położenie środka ciężkości odszukaj w notatkach z wykładu.

145. Wyznaczyć środek ciężkości odcinka kuli

$$\left\{(x,\,y,\,z):\;x^2+y^2+z^2\leqslant 1\;\wedge\;x\geqslant-\frac{1}{3}\right\}.$$

Interesująca współrzędna środka ciężkości jest liczbą wymierną o jednocyfrowym liczniku i mianowniku.

Potrzebny wzór na położenie środka ciężkości odszukaj w notatkach z wykładu.