

106. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, czyli $x = (t^2 - 1)^2$ i formalnie $dx = 4(t^3 - t) dt$, otrzymujemy

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \int_1^2 \frac{4(t^3 - t) dt}{t} = 4 \cdot \int_1^2 t^2 - 1 dt = \frac{4t^3}{3} - 4t \Big|_{t=1}^2 = \frac{32}{3} - 8 - \frac{4}{3} + 4 = \frac{28}{3} - 4 = \frac{16}{3}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $16/3$.

107. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4 + x^2}.$$

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^4 + x^2} = \frac{1}{(x^2 + 1) \cdot x^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}, \quad (*)$$

$$1 = (Ax + B) \cdot x^2 + C \cdot x \cdot (x^2 + 1) + D \cdot (x^2 + 1),$$

$$1 = Ax^3 + Bx^2 + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D,$$

$$\begin{cases} 0 &= A + C \\ 0 &= B + D \\ 0 &= C \\ 1 &= D \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $A = 0$ oraz $B = -1$.

Wobec tego

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^4 + x^2} &= \int_1^{\sqrt{3}} -\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2} dx = -\arctg x - \frac{1}{x} \Big|_{x=1}^{\sqrt{3}} = -\arctg \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \arctg 1 + 1 = \\ &= -\frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + 1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{12}$.

108. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 \frac{x^4 dx}{1 + \sqrt[3]{4x^5 - 3}}.$$

Rozwiązanie:

Wykonamy podstawienie

$$t = \sqrt[3]{4x^5 - 3},$$

czyli

$$t^3 = 4x^5 - 3$$

oraz formalnie

$$3t^2 dt = 20x^4 dx,$$

zauważając przy tym, że zależność t od x jest rosnąca, a zatem przedziałowi całkowania $x \in [1, 2]$ odpowiada przedział $t \in [1, 5]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x^4 dx}{1 + \sqrt[3]{4x^5 - 3}} &= \frac{3}{20} \cdot \int_1^5 \frac{t^2 dt}{1+t} = \frac{3}{20} \cdot \int_1^5 \frac{(t+1) \cdot (t-1) + 1}{1+t} dt = \frac{3}{20} \cdot \int_1^5 t - 1 + \frac{1}{1+t} dt = \\ &= \frac{3}{20} \cdot \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \Big|_{t=1}^5 \right) = \frac{3}{20} \cdot \left(\frac{25}{2} - 5 + \ln 6 - \frac{1}{2} + 1 - \ln 2 \right) = \frac{3}{20} \cdot (8 + \ln 3) = \\ &= \frac{6}{5} + \frac{3 \cdot \ln 3}{20}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość całki podanej w treści zadania jest równa $\frac{6}{5} + \frac{3 \cdot \ln 3}{20}$.

109. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{-1}^0 x \cdot \sqrt[3]{x+1} dx$$

podając wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt[3]{x+1}, \quad x = t^3 - 1$$

i formalnie

$$dx = 3t^2 dt.$$

Ponadto $x = -1$ odpowiada $t = 0$, a $x = 0$ odpowiada $t = 1$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x \in [-1, 0]$ odpowiada przedziałowi $t \in [0, 1]$.

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 x \cdot \sqrt[3]{x+1} dx &= \int_0^1 (t^3 - 1) \cdot t \cdot 3t^2 dt = 3 \cdot \int_0^1 t^6 - t^3 dt = 3 \cdot \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \Big|_{t=0}^1 \right) = \\ &= 3 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4} \right) = 3 \cdot \frac{4-7}{28} = 3 \cdot \frac{-3}{28} = -\frac{9}{28}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $-9/28$.

110. Wskazać takie liczby całkowite dodatnie a i b , że

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 - 14x + 50} = \frac{\pi}{2}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy funkcję podcałkową

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 - 14x + 50} = \int_a^b \frac{dx}{(x-7)^2 + 1},$$

a następnie wykonujemy podstawienie $t = x - 7$:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-7)^2 + 1} = \int_{a-7}^{b-7} \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t \Big|_{t=a-7}^{b-7} = \operatorname{arctg}(b-7) - \operatorname{arctg}(a-7).$$

Zauważmy, że

$$\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{2},$$

skąd wynika, że warunki zadania będą spełnione, jeżeli przyjmiemy $b-7=1$ i $a-7=-1$.

Odpowiedź

Warunki zadania są spełnione przez liczby $a=6$ i $b=8$.

111. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}}.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzór na różnicę sześciątów otrzymujemy

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{3\sqrt{(\sqrt{x}+1)^2} + \sqrt[3]{x-1} + 3\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}}{dx} dx.$$

Stosując podstawienie $t = \sqrt[3]{\sqrt{x}+1}$, czyli $x = t^6 - 2t^3 + 1$ i formalnie $dx = 6t^5 - 6t^2 dt$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{3\sqrt{(\sqrt{x}+1)^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}} dx &= \int_1^{\sqrt[3]{2}} t^2 \cdot (6t^5 - 6t^2) dt = \int_1^{\sqrt[3]{2}} 6t^7 - 6t^4 dt = \frac{3t^8}{4} - \frac{6t^5}{5} \Big|_{t=1}^{\sqrt[3]{2}} = \\ &= 3 \cdot \sqrt[3]{4} - \frac{12 \cdot \sqrt[3]{4}}{5} - \frac{3}{4} + \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{5} + \frac{9}{20}. \end{aligned}$$

Stosując podstawienie $t = \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}$, czyli $x = t^6 + 2t^3 + 1$ i formalnie $dx = 6t^5 + 6t^2 dt$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{3\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}} dx &= \int_{-1}^0 t^2 \cdot (6t^5 + 6t^2) dt = \int_{-1}^0 6t^7 + 6t^4 dt = \frac{3t^8}{4} + \frac{6t^5}{5} \Big|_{t=-1}^0 = \\ &= -\frac{3}{4} + \frac{6}{5} = \frac{9}{20}. \end{aligned}$$

Ponadto

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x-1} dx = \frac{3 \cdot (x-1)^{4/3}}{4} \Big|_{x=0}^1 = -\frac{3}{4}$$

W konsekwencji

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}} &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \sqrt[3]{(\sqrt{x}+1)^2} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{(\sqrt{x}-1)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{5} + \frac{9}{20} - \frac{3}{4} + \frac{9}{20} \right) = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{10} + \frac{3}{40}. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa $\frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{10} + \frac{3}{40}$.

112. Obliczyć całkę oznaczoną $\int_0^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}$.

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $x = t^6$ i formalnie $dx = 6t^5 dt$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_0^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}} &= \int_0^2 \frac{6t^5 dt}{t^3 + 2t^2} = 6 \cdot \int_0^2 \frac{t^3 dt}{t+2} = 6 \cdot \int_0^2 \frac{t^3 + 8}{t+2} - \frac{8}{t+2} dt = 6 \cdot \int_0^2 t^2 - 2t + 4 - \frac{8}{t+2} dt = \\ &= 2t^3 - 6t^2 + 24t - 48 \ln|t+2| \Big|_{t=0}^2 = 16 - 24 + 48 - 48 \ln 4 + 48 \ln 2 = 40 - 48 \ln 2. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $40 - 48 \ln 2$.

113. Pomyślałem sobie jakąś funkcję liniową $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Nie podam Ci tej funkcji, ale Ty masz za zadanie znaleźć wartość całki

$$\int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Mogę podać Ci wartość funkcji f w jednym wybranym przez Ciebie punkcie.

O wartość funkcji w którym punkcie mnie zapytasz i jak na podstawie tej informacji obliczysz wartość całki?

Odpowiedź:

Zapytaj mnie o $f(0)$. Wówczas

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \cdot f(0).$$

114. Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest liniowa. Podaj wzór na wartość całki

$$\int_a^b f(x) dx.$$

We wzorze mogą wystąpić końce przedziału a i b oraz wartość funkcji f w jednym punkcie.

Odpowiedź:

Całka oznaczona z funkcji liniowej jest równa iloczynowi długości przedziału całkowania przez wartość funkcji w środku przedziału:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

115. Pomyślałem sobie jakąś funkcję $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będącą wielomianem trzeciego stopnia. Nie podam Ci tej funkcji, ale Ty masz za zadanie znaleźć wartość całki

$$\int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Mogę podać Ci wartości funkcji f w dwóch wybranych przez Ciebie punktach.

O wartości funkcji w których dwóch punktach mnie zapytasz i jak na podstawie tej informacji obliczysz wartość całki?

Odpowiedź:

Zapytaj mnie o $f(\pm 1/\sqrt{3})$. Wówczas

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

116. Podaj wartość całki

$$\int_{-2021}^{2021} x^{2021} \cdot (x^{666} + 1)^{777} \cdot \sin \sin \cos \sin \sin x^{2021} dx.$$

Odpowiedź:

Całka ma wartość 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera.

117. Która całka ma większą wartość

$$\int_{-2022}^0 x^{2022} \cdot (x^{666} + 1)^{777} \cdot \sin \sin \cos \sin \sin x^{2021} dx$$

czy

$$\int_0^{2022} x^{2022} \cdot (x^{666} + 1)^{777} \cdot \sin \sin \cos \sin \sin x^{2021} dx ?$$

Odpowiedź:

Funkcja podcałkowa jest parzysta, skąd wynika, że podane całki są równe.

118. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{3x^3 + 4}{7}} + \sqrt[3]{\frac{7x^2 - 4}{3}} dx.$$

Wskazówka: Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji f określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x^3 + 4}{7}},$$

a następnie przedstawić daną całkę w postaci pola odpowiedniej figury.

Rozwiązanie:

Niech $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \sqrt{\frac{3x^3 + 4}{7}}.$$

Zauważmy, że $f(1) = 1$ oraz $f(2) = 2$, a ponadto przekształcanie równania $y = f(x)$ prowadzi kolejno do

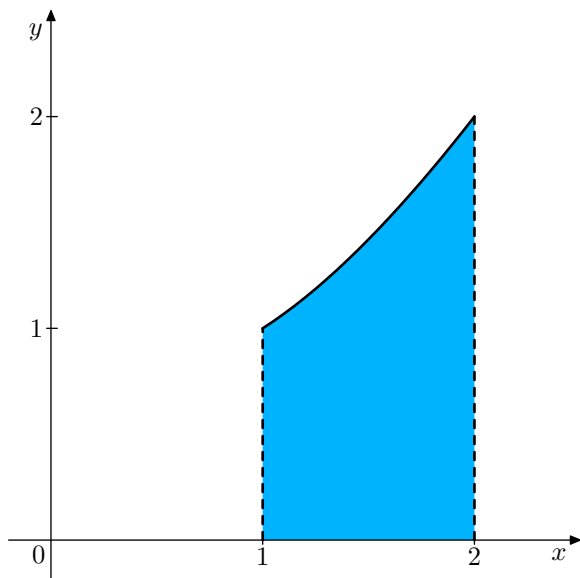
$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{3x^3 + 4}{7}}, & y^2 &= \frac{3x^3 + 4}{7}, & 7y^2 &= 3x^3 + 4, \\ 7y^2 - 4 &= 3x^3, & \frac{7y^2 - 4}{3} &= x^3, & \sqrt[3]{\frac{7y^2 - 4}{3}} &= x. \end{aligned}$$

Oznacza to, że dana w zadaniu całka ma postać

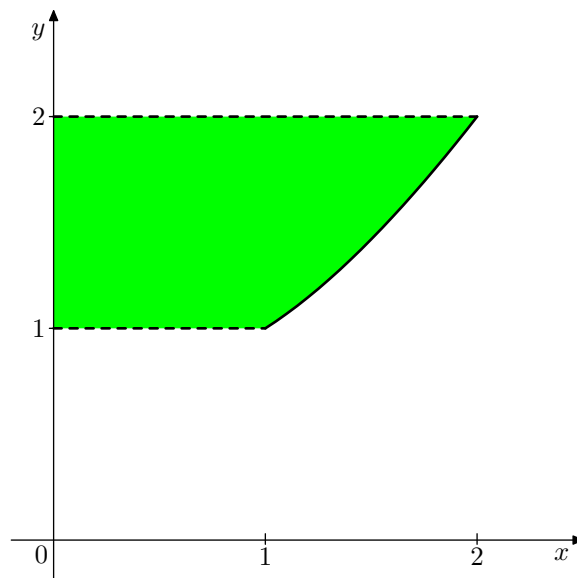
$$\int_1^2 f(x) + f^{-1}(x) dx,$$

gdzie $f^{-1} : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do f określoną wzorem

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{7x^2 - 4}{3}}.$$



rys. 1



rys. 2

Całka

$$\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{3x^3 + 4}{7}} dx$$

jest polem figury

$$\{(x, y) : 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq f(x)\} = \left\{ (x, y) : 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{3x^3 + 4}{7}} \right\}$$

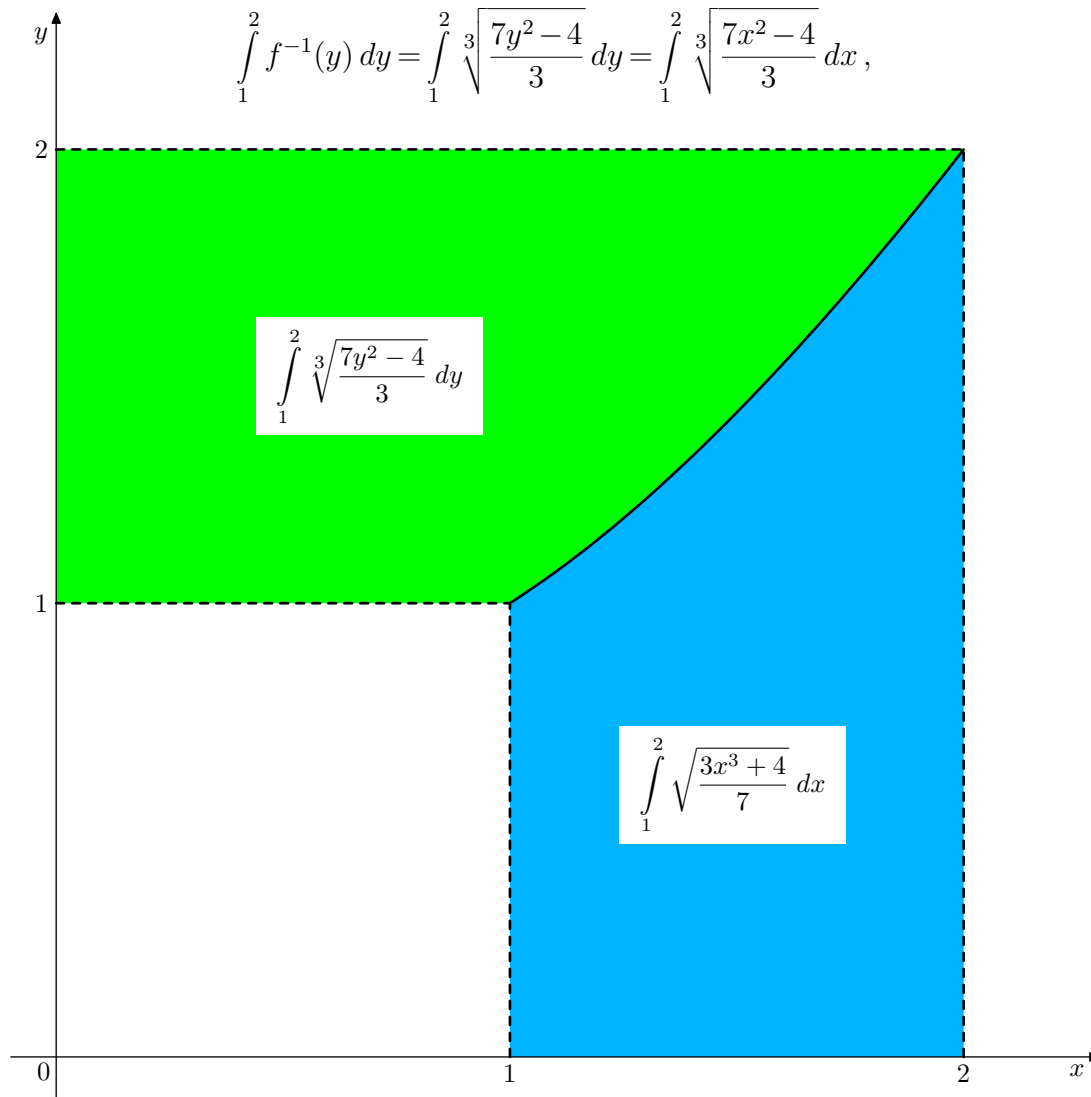
zamalowanej na rysunku 1 kolorem niebieskim.

Z kolei na rysunku 2 kolorem zielonym zamalowana jest figura

$$\{(x, y) : 1 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq x \leq f^{-1}(y)\} = \left\{ (x, y) : 1 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq x \leq \sqrt[3]{\frac{7y^2 - 4}{3}} \right\},$$

której pole jest równe

$$\int_1^2 f^{-1}(y) dy = \int_1^2 \sqrt[3]{\frac{7y^2 - 4}{3}} dy = \int_1^2 \sqrt[3]{\frac{7x^2 - 4}{3}} dx,$$



rys. 3

Dana w zadaniu całka ma więc wartość równą polu figury zamalowanej na rysunku 3. Ponieważ zamalowana figura jest sumą trzech kwadratów jednostkowych, jej pole jest równe 3.

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość 3.

119. Rozstrzygnąć, która całka jest większa:

$$\int_1^2 \sqrt[4]{\frac{127-15x^3}{7}} dx \quad \text{czy} \quad \int_1^2 \sqrt[3]{\frac{127-7x^4}{15}} dx \quad ?$$

Rozwiązanie:

Niech $f(x) = \sqrt[4]{\frac{127-15x^3}{7}}$ oraz $g(x) = \sqrt[3]{\frac{127-7x^4}{15}}$.

Wówczas $f(1) = g(1) = 2$ oraz $f(2) = g(2) = 1$, a co więcej funkcje f i g są na przedziale $[1, 2]$ malejące i odwrotne do siebie.

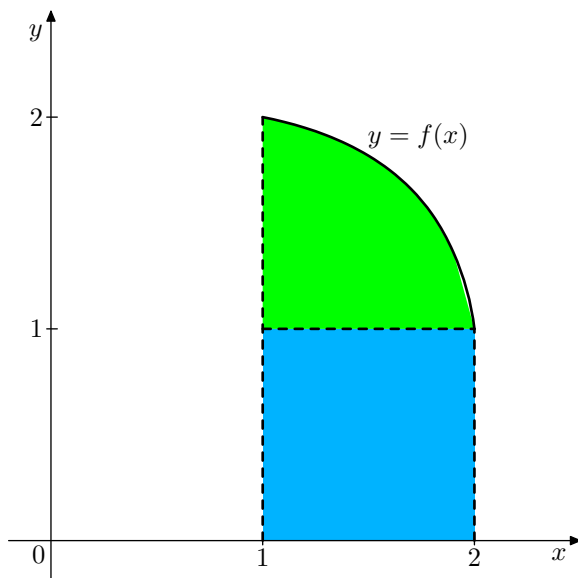
Całka

$$\int_1^2 \sqrt[4]{\frac{127-15x^3}{7}} dx = \int_1^2 f(x) dx$$

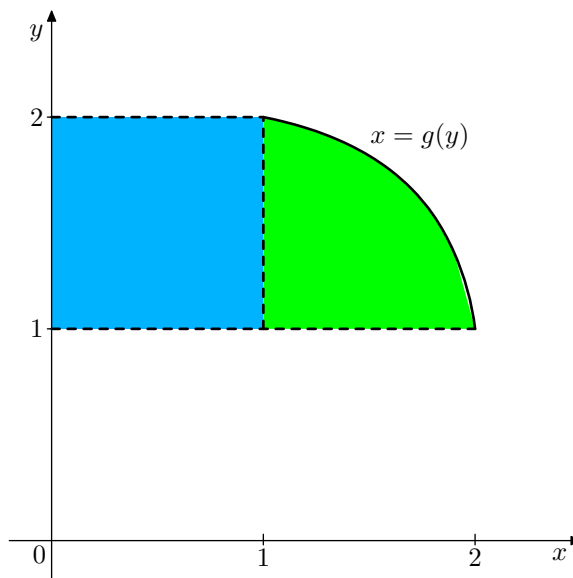
jest równa polu figury

$$\{(x, y) : 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$

zamalowanej na rysunku 4.



rys. 4



rys. 5

Z kolei całka

$$\int_1^2 \sqrt[3]{\frac{127-7x^4}{15}} dx = \int_1^2 \sqrt[3]{\frac{127-7y^4}{15}} dy = \int_1^2 g(y) dy$$

jest równa polu figury

$$\{(x, y) : 1 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq x \leq g(y)\}$$

zamalowanej na rysunku 5.

Ponieważ każda z tych figur składa się z kwadratu jednostkowego (niebieskiego) oraz tego samego trójkąta krzywoliniowego (zielonego), pola obu figur są równe.

Odpowiedź: Podane całki są równe.