W każdym z poniższych 21 zadań podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej. **Wskazówka:** W niektórych zadaniach lepiej nie całkować bezpośrednio, tylko narysować odpowiednią figurę i obliczyć jej pole.

67. $\int\limits_{2017}^{2020} 7\,dx = \mathbf{21}$ **68.** $\int\limits_0^3 x^2\,dx = \mathbf{9}$ **69.** $\int\limits_0^2 x^3\,dx = \mathbf{4}$ **70.** $\int\limits_0^1 x^{10}\,dx = \mathbf{1/11}$

71. $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\,dx = \mathbf{14/3}$ **72.** $\int\limits_1^{27} \sqrt[3]{x}\,dx = \mathbf{60}$ **73.** $\int\limits_{-2}^{10} |x|\,dx = \mathbf{52}$ **74.** $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x} = \mathbf{\ln 3}$

75. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x+1} = \mathbf{\ln 2}$ **76.** $\int\limits_1^7 \frac{dx}{x+2} = \mathbf{\ln 3}$ **77.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$ **78.** $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$

79. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}$ **80.** $\int\limits_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$ **81.** $\int\limits_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{12}}$

82. $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$ **83.** $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$ **84.** $\int\limits_{-1}^0 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}$

85. $\int\limits_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}$ **86.** $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \boldsymbol{\pi}$ **87.** $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\,dx = \boldsymbol{\pi}$

88. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int\limits_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+24}}\,.$$

Rozwiązanie:

Po skorzystaniu ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$\int\limits_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+24}} = \int\limits_1^{25} \frac{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}{24}\,dx = \frac{1}{24}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot(x+24)^{3/2}-\frac{2}{3}\cdot x^{3/2}\right)\Bigg|_{x=1}^{25} =$$

$$= \frac{1}{36}\cdot\left((x+24)^{3/2}-x^{3/2}\right)\Bigg|_{x=1}^{25} = \frac{1}{36}\cdot(343-125-125+1) = \frac{94}{36} = \frac{47}{18}\,.$$

89. Udowodnić nierówność

$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x}\, dx < \frac{1}{8}\,.$$

Rozwiązanie:

Pochodna funkcji podcałkowej $f(x)=x^{2x}$ dana jest wzorem

$$f'(x)=\frac{d}{dx}x^{2x}=\frac{d}{dx}e^{2x\cdot\ln x}=e^{2x\cdot\ln x}\cdot\frac{d}{dx}(2x\cdot\ln x)=x^{2x}\cdot(2\cdot\ln x+2)=2\cdot x^{2x}\cdot(\ln x+1)\ .$$

Ponieważ $f'(x)>0$ dla $x>1/e$ oraz $f'(x)<0$ dla $0<x<1/e$, funkcja f jest malejąca w przedziale $(0,\,1/e)$ i rosnąca w przedziale $(1/e,\,+\infty)$. Zauważmy ponadto, że

$$f(1/4)=1/2$$

oraz

$$f(1/2)=1/2\,.$$

Wobec tego $f(x)<1/2$ dla $x\in(1/4,\,1/2)$, skąd

$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x}\, dx < \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\,.$$

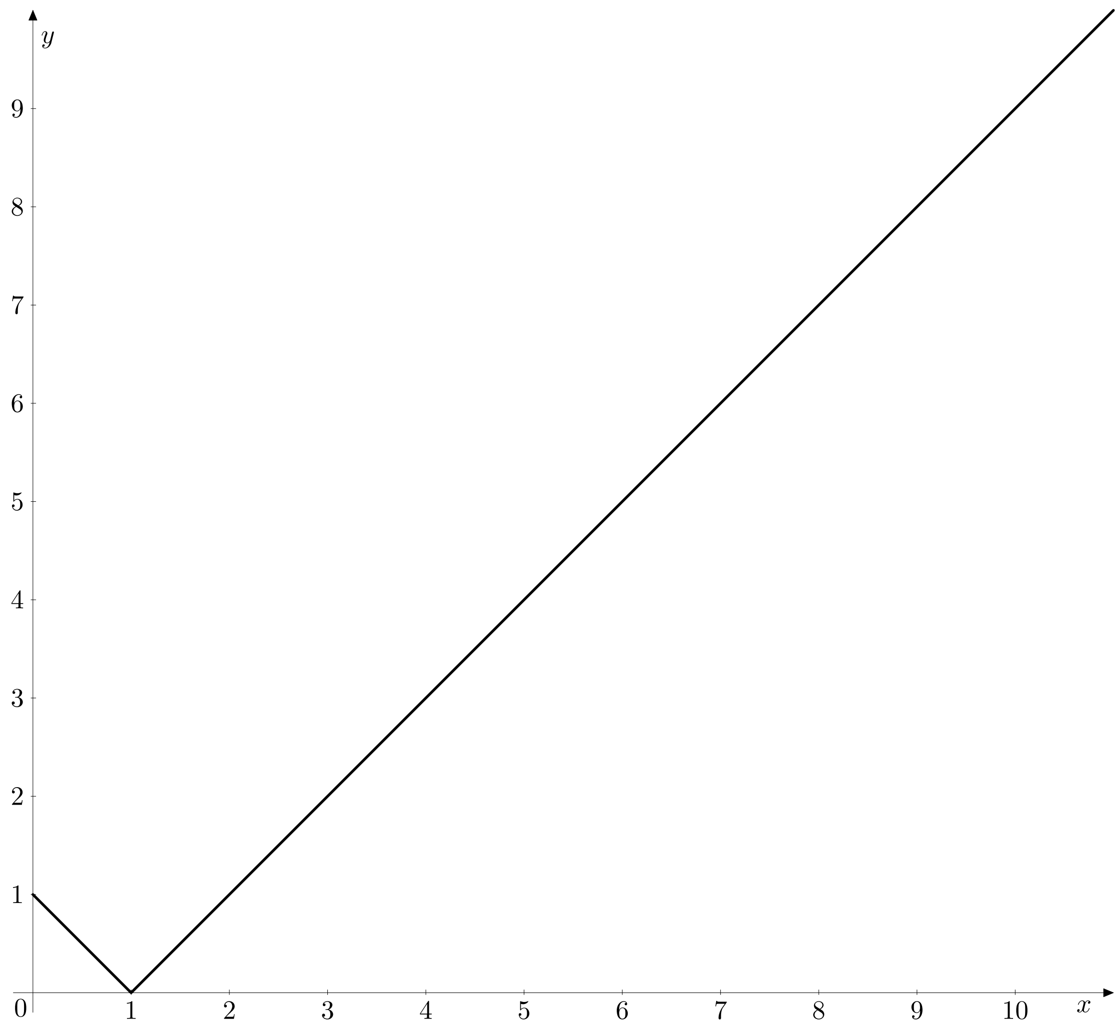
Uwaga: Obliczenia komputerowe pokazują, że dana w zadaniu całka ma wartość w przybliżeniu 0,1215. Wydaje się to być zbyt bliskie oszacowaniu $1/8=0,125$, aby zadziałały inne metody szacowania (zapewne obarczone większym błędem).

90. Niech $f_1(x)=\sqrt{x^2-2x+1}$ oraz $f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$. Obliczyć wartość całki oznaczonej

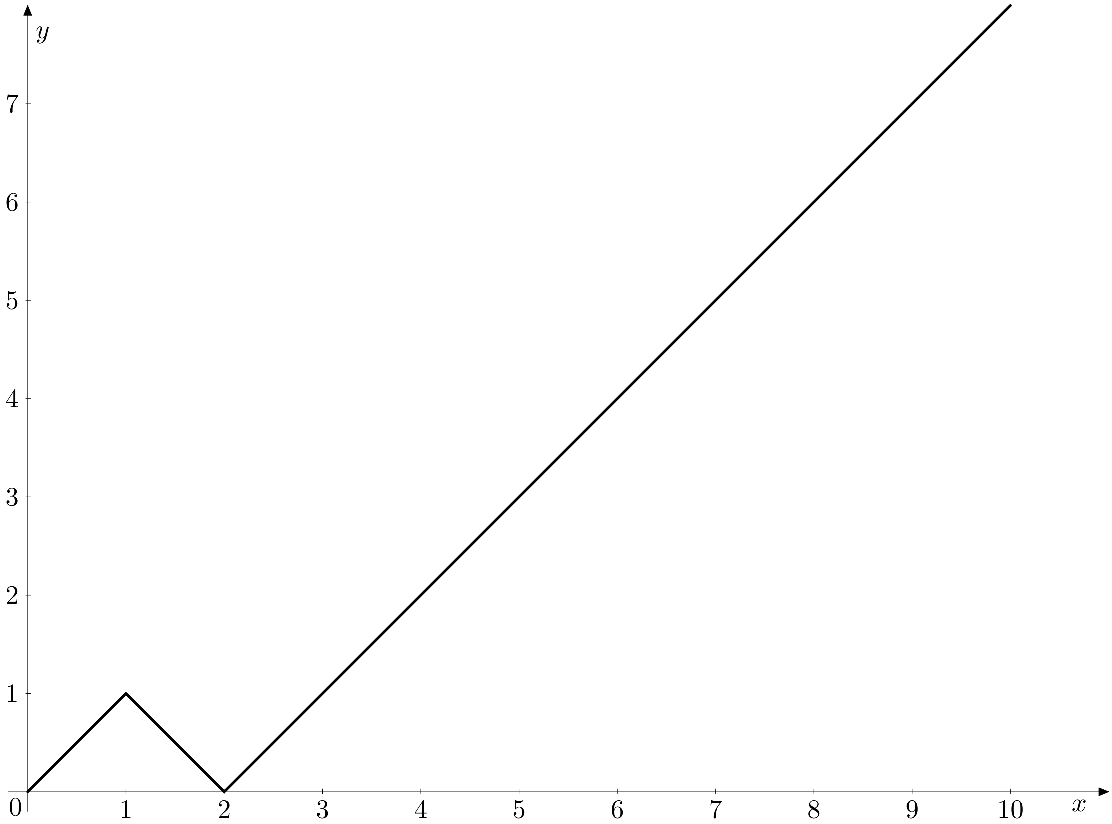
$$\int_0^{10} f_5(x)\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

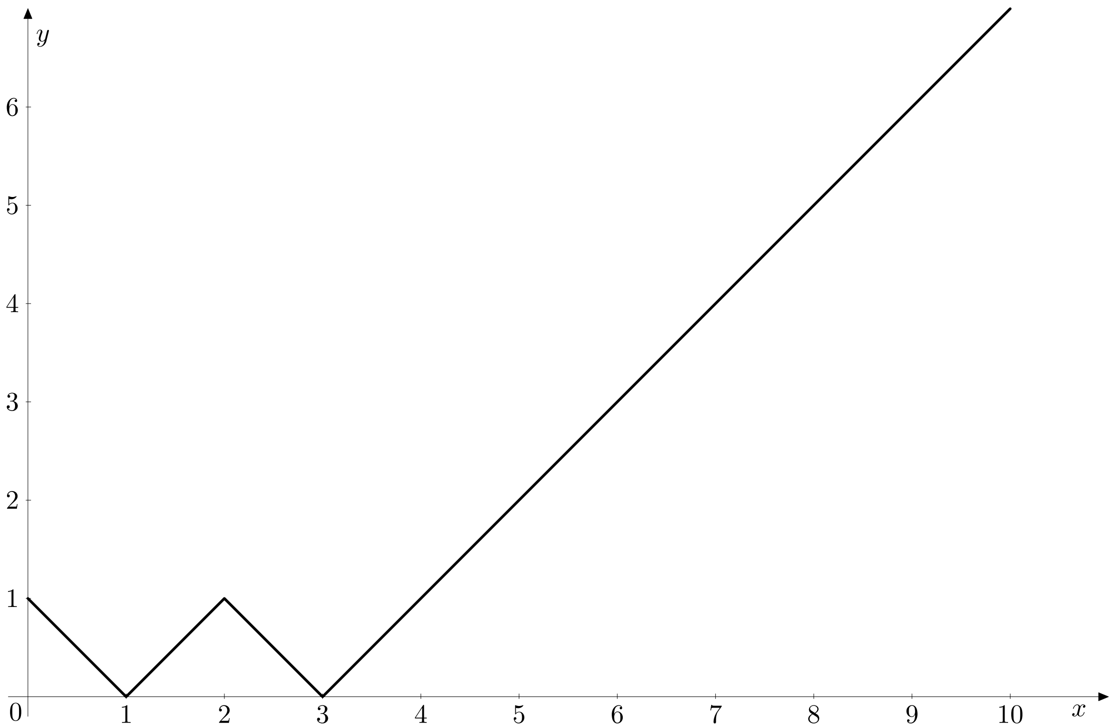
Zauważmy, że $f_1(x)=|x-1|$. W związku z tym wykres funkcji $f_1\circ g$ powstaje z wykresu funkcji g przez przesunięcie tegoż wykresu w dół o 1 oraz symetryczne odbicie części wykresu, która znalazła się pod osią OX. Wykresy funkcji od f_1 do f_5 znajdują się odpowiednio na rysunkach od 1 do 5.



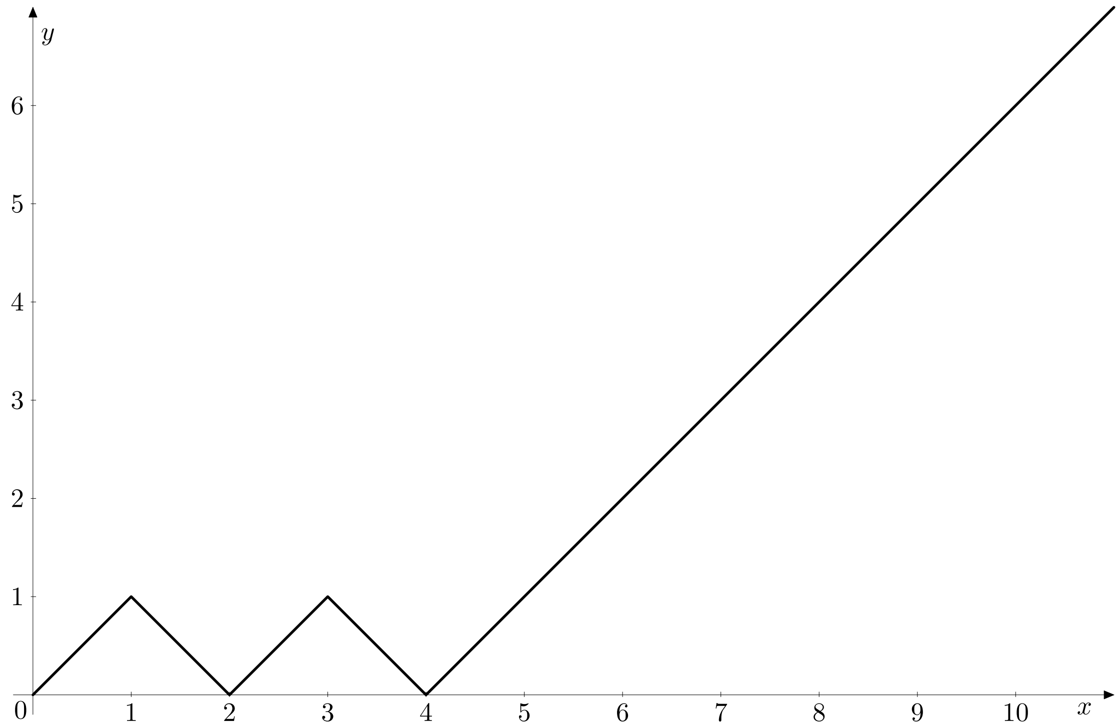
rys. 1



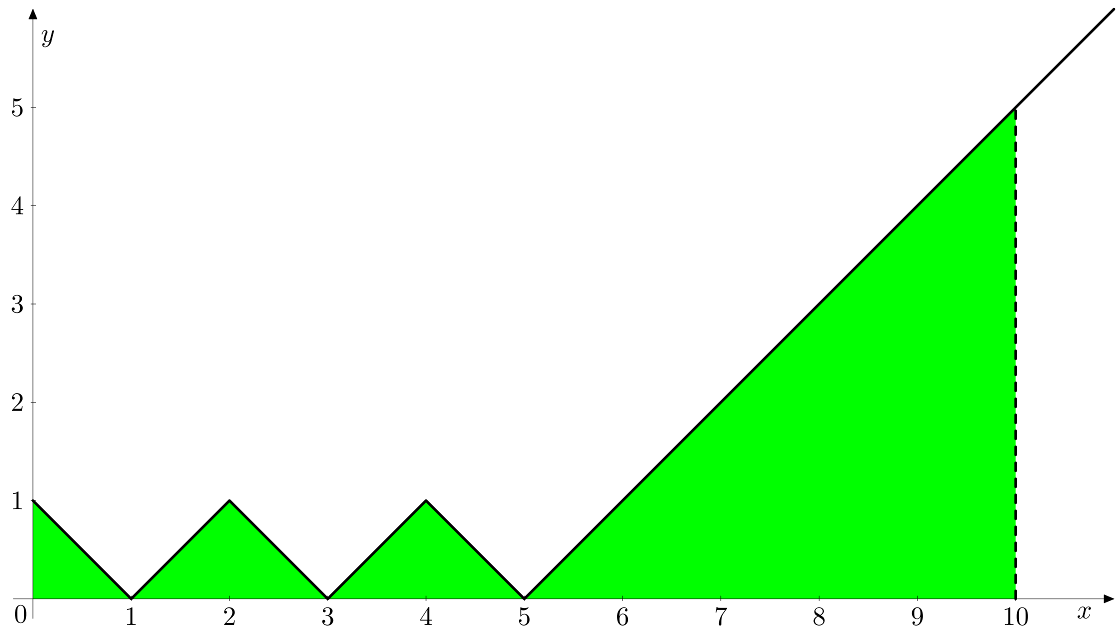
rys. 2



rys. 3



rys. 4



rys. 5

Szukana wartość całki oznaczonej jest równa polu zielonej figury z rysunku 5. Pole to wyliczamy sumując pola trójkątów, które się na nie składają:

$$\frac{1}{2}+1+1+\frac{25}{2}=15\,.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest równa 15.

Udowodnić następujące nierówności:

91. $\frac{1}{5} < \int\limits_1^2 \frac{1}{x^2+1}\, dx < \frac{1}{2}$

92. $\frac{1}{11} < \int\limits_9^{10} \frac{dx}{x+\sin x} < \frac{1}{8}$

93. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{|x|}{1+x^2}\, dx < \frac{3}{2}$

94. $\int\limits_0^1 x\cdot\left(1-x^{99+x}\right) dx < \frac{1}{2}$

95. $5 < \int\limits_1^3 x^x\, dx < 31$

96. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} < \frac{3}{4}$

97. $2\sqrt{2} < \int\limits_2^4 x^{1/x}\, dx$

98. $\frac{19}{3} < \int\limits_2^3 x^x\, dx < \frac{65}{4}$. **Wsk.:** Oszacować x^x przez x^a.

99. Niech

$$C(a,b) = \left[\int\limits_a^b \log_x 2\, dx\right],$$

gdzie $[y]$ oznacza część całkowitą liczby y. Obliczyć wartości wyrażeń:

a) $C(80,122)$ **b)** $C(200,240)$ **c)** $C(400,440)$ **d)** $C(800,880)$

100. Dla podanej liczby a wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą dodatnią b, aby zachodziła równość

$$\int\limits_a^b \frac{x\, dx}{x^2+1} = \frac{\ln 5}{2}.$$

a) $a=0$ **b)** $a=1$ **c)** $a=2$ **d)** $a=3$

101. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \log_2\left(5^x+3\right)\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=\log_2\left(5^x+3\right).$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^x\cdot\ln 5}{5^x+3}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^x\cdot(\ln 5)^2}{5^x+3}-\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{5^{2x}\cdot(\ln 5)^2}{\left(5^x+3\right)^2}=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{3\cdot 5^x\cdot(\ln 5)^2}{\left(5^x+3\right)^2}>0\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła.

Ponieważ $f(1)=3$ oraz $f(3)=7$, wykres funkcji f leży poniżej cięciwy o końcach $(1,3)$ i $(3,7)$. Wobec tego $f(x)<2x+1$ dla $x\in(1,3)$ i w konsekwencji

$$\int_1^3 \log_2\left(5^x+3\right)\,dx<\int_1^3 2x+1\,dx=10\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od 10.

102. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_{10}^{12} \sqrt[3]{x^2+4}\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

Wskazówka: Tym razem zamiast cięciwy rozważyć odpowiednią styczną do wykresu funkcji podcałkowej.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+4}\,.$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{2x}{3}\cdot\left(x^2+4\right)^{-2/3}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\left(x^2+4\right)^{-2/3}-\frac{8x^2}{9}\cdot\left(x^2+4\right)^{-5/3}=\frac{2x^2+8}{3}\cdot\left(x^2+4\right)^{-5/3}-\frac{8x^2}{9}\cdot\left(x^2+4\right)^{-5/3}=$$

$$=\frac{6x^2+24-8x^2}{9}\cdot\left(x^2+4\right)^{-5/3}=\frac{24-2x^2}{9}\cdot\left(x^2+4\right)^{-5/3}\quad<\quad 0\,,\qquad\text{o ile}\qquad x^2>12\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $\left[\sqrt{12},+\infty\right)$ zawierającym interesujący nas przedział całkowania $[10,12]$.

Ponieważ $f(11)=5$, wykres funkcji f w przedziale całkowania leży poniżej[1] stycznej do wykresu w punkcie $(11,5)$. Wobec tego

$$f(x)<5+f'(11)\cdot(x-11) \qquad \text{dla} \qquad x\in(10,12)$$

i w konsekwencji

$$\int_{10}^{12}\sqrt[3]{x^2+4}\,dx<\int_{10}^{12}5+f'(11)\cdot(x-11)\,dx=10\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu. Można też wykonać bezpośrednie całkowanie.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od 10.

Uwaga 1: Bez trudu można wyliczyć, że $f'(11)=22/75$ i wstawić tę wartość do wzorów występujących w rozwiązaniu, ale jest to całkiem zbyteczne z matematycznego punktu widzenia. Może to być jednak wskazane ze względów medycznych (większy komfort psychiczny osoby rozwiązującej zadanie).

Uwaga 2: Przy pomocy komputera można wyliczyć, że wartość podanej całki jest w przybliżeniu równa $9,9974$.

103. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_{3}^{5}\sqrt[3]{x^2+11}\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 6.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+11}\,.$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{2x}{3}\cdot\left(x^2+11\right)^{-2/3}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\left(x^2+11\right)^{-2/3}-\frac{8x^2}{9}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3}=$$

$$=\frac{2x^2+22}{3}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3}-\frac{8x^2}{9}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3}=\frac{6x^2+66-8x^2}{9}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3}=$$

$$=\frac{-2x^2+66}{9}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3}=\left(33-x^2\right)\cdot\frac{2}{9}\cdot\left(x^2+11\right)^{-5/3} \;>\; 0\,, \qquad \text{o ile} \qquad x^2<33\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $\left[-\sqrt{33},\sqrt{33}\right]$ zawierającym interesujący nas przedział całkowania $[3,5]$.

[1]Takie sformułowanie jest zgrabne, chociaż dla jego pełnej poprawności wymagałoby dodania nic nie wnoszącego do rozwiązania zastrzeżenia, że punkt styczności leży na stycznej, a nie poniżej niej.

Ponieważ $f(4)=3$, wykres funkcji f w przedziale całkowania leży powyżej[2] stycznej do wykresu w punkcie $(4, 3)$. Wobec tego

$$f(x)>3+f'(4)\cdot(x-4) \qquad \text{dla} \qquad x\in(3, 5)$$

i w konsekwencji

$$\int_3^5 \sqrt[3]{x^2+11}\,dx > \int_3^5 3+f'(4)\cdot(x-4)\,dx=6\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu. Można też wykonać bezpośrednie całkowanie.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest większa od 6.

Uwaga: Faktycznie podana całka ma wartość w przybliżeniu równą 6,005.

104. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_7^8 \sqrt[3]{x^2+15}\,dx \approx \mathbf{4,146}$$

jest mniejsza czy większa od $199/48\approx\mathbf{4,146}$.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2+15}\,.$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{2x}{3\cdot(x^2+15)^{2/3}}$$

oraz

$$f''(x)=\frac{2}{3\cdot(x^2+15)^{2/3}}-\frac{8x^2}{9\cdot(x^2+15)^{5/3}}=\frac{6\cdot(x^2+15)}{9\cdot(x^2+15)^{5/3}}-\frac{8x^2}{9\cdot(x^2+15)^{5/3}}=$$

$$\frac{6x^2+6\cdot15-8x^2}{9\cdot(x^2+15)^{5/3}}=\frac{-2x^2+90}{9\cdot(x^2+15)^{5/3}}=\frac{2\cdot(-x^2+45)}{9\cdot(x^2+15)^{5/3}}<0$$

dla $x>\sqrt{45}$, skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wklęsła w przedziale $\left[\sqrt{45}, \infty\right)$ zawierającym interesujący nas przedział całkowania $[7,8]$.

Zatem wykres funkcji f dla $x>7$ leży poniżej prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie 7. Ponieważ $f(7)=4$ oraz $f'(7)=7/24$, dla $x>7$ zachodzi nierówność

$$f(x)<4+\frac{7(x-7)}{24}$$

i w konsekwencji

$$\int_7^8 \sqrt[3]{x^2+15}\,dx<\int_7^8 4+\frac{7(x-7)}{24}\,dx=4+\frac{7}{48}=\frac{199}{48}\,.$$

[2] Takie sformułowanie jest zgrabne, chociaż dla jego pełnej poprawności wymagałoby dodania nic nie wnoszącego do rozwiązania zastrzeżenia, że punkt styczności leży na stycznej, a nie powyżej niej.

Wartość ostatniej całki można obliczyć całkując bezpośrednio albo interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest mniejsza od 199/48.

105. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_6^8 \sqrt{x^3-54}\,dx$$

jest mniejsza czy większa od 34.

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f funkcję podcałkową:

$$f(x)=\sqrt{x^3-54}\,.$$

Wówczas

$$f'(x)=\frac{3x^2}{2}\cdot\left(x^3-54\right)^{-1/2}$$

oraz

$$f''(x)=3x\cdot\left(x^3-54\right)^{-1/2}-\frac{9x^4}{4}\cdot\left(x^3-54\right)^{-3/2}=$$

$$=\frac{12x^4-648x}{4}\cdot\left(x^3-54\right)^{-3/2}-\frac{9x^4}{4}\cdot\left(x^3-54\right)^{-3/2}=\frac{12x^4-648x-9x^4}{4}\cdot\left(x^3-54\right)^{-3/2}=$$

$$=\frac{3x^4-648x}{4}\cdot\left(x^3-54\right)^{-3/2}=\frac{3x\cdot(x^3-216)}{4}\cdot\left(x^3-54\right)^{-3/2}\quad>\quad 0\,,\qquad\text{o ile}\qquad x^3>216\,,$$

skąd wynika, że funkcja f jest ściśle wypukła w przedziale $[6,+\infty)$ zawierającym interesujący nas przedział całkowania $[6,8]$.

Ponieważ $f(7)=17$, wykres funkcji f w przedziale całkowania leży powyżej[3] stycznej do wykresu w punkcie $(7,17)$. Wobec tego

$$f(x)>17+f'(7)\cdot(x-7)\qquad\text{dla}\qquad x\in(6,8)$$

i w konsekwencji

$$\int_6^8 \sqrt{x^3-54}\,dx>\int_6^8 17+f'(7)\cdot(x-7)\,dx=34\,.$$

Wartość ostatniej całki można obliczyć interpretując ją geometrycznie jako pole odpowiedniego trapezu. Można też wykonać bezpośrednie całkowanie.

Odpowiedź: Wartość podanej całki oznaczonej jest większa od 34.

Uwaga: Bez trudu można wyliczyć, że $f'(7)=147/34$ i wstawić tę wartość do wzorów występujących w rozwiązaniu, ale jest to zbyteczne, gdyż ta wartość nie ma wpływu na otrzymane oszacowanie.

[3]Takie sformułowanie jest zgrabne, chociaż dla jego pełnej poprawności wymagałoby dodania nic nie wnoszącego do rozwiązania zastrzeżenia, że punkt styczności leży na stycznej, a nie powyżej niej.