

Zadania do omówienia na ćwiczeniach¹ we wtorek/środę 22/23.03.2022.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.

W każdym z poniższych 21 zadań podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej. **Wskazówka:** W niektórych zadaniach lepiej nie całkować bezpośrednio, tylko narysować odpowiednią figurę i obliczyć jej pole.

$$67. \int_{2017}^{2020} 7 dx \dots\dots \quad 68. \int_0^3 x^2 dx \dots\dots \quad 69. \int_0^2 x^3 dx \dots\dots \quad 70. \int_0^1 x^{10} dx \dots\dots$$

$$71. \int_1^4 \sqrt{x} dx \dots\dots \quad 72. \int_1^{27} \sqrt[3]{x} dx \dots\dots \quad 73. \int_{-2}^{10} |x| dx \dots\dots \quad 74. \int_1^3 \frac{dx}{x} \dots\dots$$

$$75. \int_1^3 \frac{dx}{x+1} \dots\dots \quad 76. \int_1^7 \frac{dx}{x+2} \dots\dots \quad 77. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \dots\dots \quad 78. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} \dots\dots$$

$$79. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} \dots\dots \quad 80. \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} \dots\dots \quad 81. \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{x^2+1} \dots\dots$$

$$82. \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \dots\dots \quad 83. \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \dots\dots \quad 84. \int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} dx \dots\dots$$

$$85. \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx \dots\dots \quad 86. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \dots\dots \quad 87. \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx \dots\dots$$

88. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^{25} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{x+24}}.$$

89. Udowodnić nierówność

$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x} dx < \frac{1}{8}.$$

90. Niech $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ oraz $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{10} f_5(x) dx.$$

Udowodnić następujące nierówności:

$$91. \frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{x^2+1} dx < \frac{1}{2} \quad 92. \frac{1}{11} < \int_9^{10} \frac{dx}{x + \sin x} < \frac{1}{8} \quad 93. \int_{-1}^2 \frac{|x|}{1+x^2} dx < \frac{3}{2}$$

$$94. \int_0^1 x \cdot (1 - x^{99+x}) dx < \frac{1}{2} \quad 95. 5 < \int_1^3 x^x dx < 31 \quad 96. \int_1^2 \frac{dx}{x} < \frac{3}{4}$$

¹Ostatnie zadania można odłożyć do następnego tygodnia.

$$97. 2\sqrt{2} < \int_2^4 x^{1/x} dx$$

$$98. \frac{19}{3} < \int_2^3 x^x dx < \frac{65}{4}. \quad \text{Wsk.: Oszacować } x^x \text{ przez } x^a.$$

99. Niech

$$C(a, b) = \left[\int_a^b \log_x 2 dx \right],$$

gdzie $[y]$ oznacza część całkowitą liczby y . Obliczyć wartości wyrażeń:

$$\text{a) } C(80, 122) \quad \text{b) } C(200, 240) \quad \text{c) } C(400, 440) \quad \text{d) } C(800, 880)$$

100. Dla podanej liczby a wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą dodatnią b , aby zachodziła równość

$$\int_a^b \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{\ln 5}{2}.$$

$$\text{a) } a = 0 \quad \text{b) } a = 1 \quad \text{c) } a = 2 \quad \text{d) } a = 3$$

101. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \log_2(5^x + 3) dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

102. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_{10}^{12} \sqrt[3]{x^2 + 4} dx$$

jest mniejsza czy większa od 10.

Wskazówka: Tym razem zamiast cięciwy rozważyć odpowiednią styczną do wykresu funkcji podcałkowej.

103. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_3^5 \sqrt[3]{x^2 + 11} dx$$

jest mniejsza czy większa od 6.

104. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_7^8 \sqrt[3]{x^2 + 15} dx \approx 4,146$$

jest mniejsza czy większa od $199/48 \approx 4,146$.

105. Rozstrzygnąć, czy wartość całki oznaczonej

$$\int_6^8 \sqrt{x^3 - 54} dx$$

jest mniejsza czy większa od 34.