

52. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x+2}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} dx.$$

Rozwiązanie:

Sposób I (normalny): Rozkładamy funkcję podcałkową na ułamki proste:

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{D}{x+3} + \frac{E}{x+4}, \\ x+2 &= A \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4) + B \cdot x \cdot (x+3) \cdot (x+4) + \\ &+ D \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+4) + E \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x+3). \end{aligned} \quad (1)$$

W czasie, gdy miłośnicy rachunków są zajęci wymnażaniem wielomianu po prawej stronie równania (1), układaniem układu czterech równań liniowych z czterema niewiadomymi i rozwiązywaniem go, podstawimy do równości (1) kolejno  $x=0, -1, -3, -4$ . Otrzymujemy:

$$\text{dla } x=0 \quad 2=12A, \quad \text{skąd } A=1/6,$$

$$\text{dla } x=-1 \quad 1=-6B, \quad \text{skąd } B=-1/6,$$

$$\text{dla } x=-3 \quad -1=6D, \quad \text{skąd } D=-1/6,$$

$$\text{dla } x=-4 \quad -2=-12E, \quad \text{skąd } E=1/6.$$

To pozwala dokończyć obliczanie danej w zadaniu całki:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} dx &= \frac{1}{6} \cdot \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} dx = \\ &= \frac{1}{6} \cdot (\ln|x| - \ln|x+1| - \ln|x+3| + \ln|x+4|) + C. \end{aligned}$$

Sposób II (trikowy): Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x \cdot (x+1) \cdot (x+3) \cdot (x+4)} dx &= \int \frac{x+2}{(x \cdot (x+4)) \cdot ((x+1) \cdot (x+3))} dx = \\ &= \int \frac{x+2}{(x^2+4x) \cdot (x^2+4x+3)} dx, \end{aligned}$$

a następnie podstawiamy  $t = x^2 + 4x$  i formalnie  $dt = 2(x+2) dx$ . Otrzymujemy

$$\int \frac{x+2}{(x^2+4x) \cdot (x^2+4x+3)} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t \cdot (t+3)}.$$

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\frac{1}{t \cdot (t+3)} = \frac{1/3}{t} - \frac{1/3}{t+3},$$

co pozwala dokończyć obliczenia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t \cdot (t+3)} &= \frac{1}{6} \cdot \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+3} dt = \frac{1}{6} \cdot (\ln|t| - \ln|t+3|) + C = \\ &= \frac{1}{6} \cdot (\ln|x^2+4x| - \ln|x^2+4x+3|) + C. \end{aligned}$$

53. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 40}.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy daną całkę i wykonujemy kolejno podstawienia  $y = x + 2$  oraz  $t = y/6$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 40} &= \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 36} = \int \frac{dy}{y^2 + 36} = \int \frac{dy}{36(y/6)^2 + 36} = \int \frac{6 dt}{36t^2 + 36} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{\operatorname{arctg} t}{6} + C = \frac{\operatorname{arctg}(y/6)}{6} + C = \frac{\operatorname{arctg}((x+2)/6)}{6} + C. \end{aligned}$$

54. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie  $x = t^6$  i formalnie  $dx = 6t^5 dt$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{t^3}{1 + t^2} \cdot 6t^5 dt = 6 \cdot \int \frac{t^8 dt}{t^2 + 1} = 6 \cdot \int \frac{(t^8 - 1) + 1}{t^2 + 1} dt = 6 \cdot \int t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\ &= \frac{6t^7}{7} - \frac{6t^5}{5} + 2t^3 - 6t + 6 \cdot \operatorname{arctg} t + C = \frac{6x^{7/6}}{7} - \frac{6x^{5/6}}{5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C. \end{aligned}$$

55. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie  $x = t^6$  i formalnie  $dx = 6t^5 dt$ , otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \cdot \int \frac{t^3 dt}{t+1} = 6 \cdot \int \frac{(t^3 + 1) - 1}{t+1} dt = 6 \cdot \int t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} dt = \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \cdot \ln|t+1| + C = 2 \cdot \sqrt{x} - 3 \cdot \sqrt[3]{x} + 6 \cdot \sqrt[6]{x} - 6 \cdot \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C. \end{aligned}$$

56. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}}.$$

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}},$$

co daje

$$t^2 = 1 + \sqrt{1+x},$$

$$t^2 - 1 = \sqrt{1+x},$$

$$(t^2 - 1)^2 = 1+x,$$

$$(t^2 - 1)^2 - 1 = x,$$

$$t^4 - 2t^2 = x$$

i formalnie

$$4 \cdot (t^3 - t) dt = dx.$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} &= \int \frac{4 \cdot (t^3 - t) dt}{1 + t} = 4 \cdot \int t^2 - t dt = \frac{4t^3}{3} - 2t^2 + C = \\ &= \frac{4 \cdot (\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}})^3}{3} - 2 \cdot (\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}})^2 + C = \frac{4 \cdot (\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}})^3}{3} - 2 - 2\sqrt{1 + x} + C = \\ &= \frac{4 \cdot (\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}})^3}{3} - 2\sqrt{1 + x} + C_2. \end{aligned}$$

**57.** Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} dx.$$

*Rozwiązanie:*

Wykonując podstawienie

$$t = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}},$$

skąd kolejno

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}} = t^2 - 1,$$

$$\sqrt{1 + x} = (t^2 - 1)^2 - 1 = t^4 - 2t^2,$$

$$x = (t^4 - 2t^2)^2 - 1 = t^8 - 4t^6 + 4t^4 - 1$$

i formalnie

$$dx = 8t^7 - 24t^5 + 16t^3 dt,$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} dx &= \int t \cdot (8t^7 - 24t^5 + 16t^3) dt = \int 8t^8 - 24t^6 + 16t^4 dt = \\ &= \frac{8t^9}{9} - \frac{24t^7}{7} + \frac{16t^5}{5} + C = \\ &= \frac{8}{9} \cdot (1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}})^{9/2} - \frac{24}{7} \cdot (1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}})^{7/2} + \frac{16}{5} \cdot (1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}})^{5/2} + C. \end{aligned}$$

58. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$J(x) = \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} dx.$$

Sprawdzić, że  $J(1) = J(-1) + \frac{33\sqrt[3]{2}}{70}$ , a jeśli tak nie jest, poszukać błędu rachunkowego.

Rozwiązanie:

Sposób I

Dwukrotnie całkujemy przez części:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} dx = x^2 \cdot \frac{3 \cdot (x+1)^{4/3}}{4} - \frac{3}{2} \cdot \int x \cdot (x+1)^{4/3} dx = \\ &= \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot (x+1)^{4/3} - \frac{3}{2} \cdot x \cdot \frac{3 \cdot (x+1)^{7/3}}{7} + \frac{9}{14} \cdot \int (x+1)^{7/3} dx = \\ &= \frac{3}{4} \cdot x^2 \cdot (x+1)^{4/3} - \frac{9}{14} \cdot x \cdot (x+1)^{7/3} + \frac{27}{140} \cdot (x+1)^{10/3} + C. \end{aligned}$$

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned} J(-1) &= C, \\ J(1) &= \frac{3}{4} \cdot 2 \sqrt[3]{2} - \frac{9}{14} \cdot 4 \sqrt[3]{2} + \frac{27}{140} \cdot 8 \sqrt[3]{2} + C = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{2} - \frac{18}{7} \cdot \sqrt[3]{2} + \frac{54}{35} \cdot \sqrt[3]{2} + C = \\ &= \frac{105}{70} \cdot \sqrt[3]{2} - \frac{180}{70} \cdot \sqrt[3]{2} + \frac{108}{70} \cdot \sqrt[3]{2} + C = \frac{105 - 180 + 108}{70} \cdot \sqrt[3]{2} + C = \\ &= \frac{33}{70} \cdot \sqrt[3]{2} + C = J(-1) + \frac{33\sqrt[3]{2}}{70}. \end{aligned}$$

Sposób II

Wykonujemy podstawienie  $t = \sqrt[3]{x+1}$ , czyli  $x = t^3 - 1$  i formalnie  $dx = 3t^2 dt$ :

$$\begin{aligned} J(x) &= \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} dx = \int (t^3 - 1)^2 \cdot t \cdot 3t^2 dt = 3 \cdot \int t^9 - 2t^6 + t^3 dt = \\ &= \frac{3}{10} \cdot t^{10} - \frac{6}{7} \cdot t^7 + \frac{3}{4} \cdot t^4 + C = \frac{3}{10} \cdot (x+1)^{10/3} - \frac{6}{7} \cdot (x+1)^{7/3} + \frac{3}{4} \cdot (x+1)^{4/3} + C. \end{aligned}$$

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned} J(-1) &= C, \\ J(1) &= \frac{3}{10} \cdot 8 \sqrt[3]{2} - \frac{6}{7} \cdot 4 \sqrt[3]{2} + \frac{3}{4} \cdot 2 \sqrt[3]{2} + C = \frac{12}{5} \cdot \sqrt[3]{2} - \frac{24}{7} \cdot \sqrt[3]{2} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{2} + C = \\ &= \frac{168}{70} \cdot \sqrt[3]{2} - \frac{240}{70} \cdot \sqrt[3]{2} + \frac{105}{70} \cdot \sqrt[3]{2} + C = \frac{168 - 240 + 105}{70} \cdot \sqrt[3]{2} + C = \\ &= \frac{33}{70} \cdot \sqrt[3]{2} + C = J(-1) + \frac{33\sqrt[3]{2}}{70}. \end{aligned}$$

Sposób III

Wykonujemy podstawienie  $t = x+1$ , czyli  $x = t-1$  i formalnie  $dx = dt$ :

$$J(x) = \int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1} dx = \int (t-1)^2 \cdot \sqrt[3]{t} dt = \int t^{7/3} - 2t^{4/3} + t^{1/3} dt =$$

$$= \frac{3}{10} \cdot t^{10/3} - \frac{6}{7} \cdot t^{7/3} + \frac{3}{4} \cdot t^{4/3} + C = \frac{3}{10} \cdot (x+1)^{10/3} - \frac{6}{7} \cdot (x+1)^{7/3} + \frac{3}{4} \cdot (x+1)^{4/3} + C.$$

Sprawdzenie jak w sposobie II.

**59.** Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x+2}} dx.$$

*Rozwiązanie:*

Dwukrotnie całkujemy przez części:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x+2}} dx &= \int x^2 \cdot (x+2)^{-1/3} dx = x^2 \cdot \frac{3 \cdot (x+2)^{2/3}}{2} - 3 \cdot \int x \cdot (x+2)^{2/3} dx = \\ &= \frac{3}{2} \cdot x^2 \cdot (x+2)^{2/3} - 3 \cdot x \cdot \frac{3 \cdot (x+2)^{5/3}}{5} + \frac{9}{5} \cdot \int (x+2)^{5/3} dx = \\ &= \frac{3}{2} \cdot x^2 \cdot (x+2)^{2/3} - \frac{9}{5} \cdot x \cdot (x+2)^{5/3} + \frac{27}{40} \cdot (x+2)^{8/3} + C. \end{aligned}$$

*Uwagi:*

Daną w zadaniu całkę można również obliczyć całkując przez podstawienie  $t = x + 2$  lub  $t = \sqrt[3]{x+2}$ .

Całkowanie przez podstawienie musi prowadzić do tego samego wyniku, ale może być on w innej postaci – dopiero po wykonaniu odpowiednich przekształceń można stwierdzić zgodność obydwu odpowiedzi.

**60.** Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \sqrt[3]{8x^{17} + x^{12}} dx.$$

*Rozwiązanie:*

Przekształcamy podaną całkę

$$\int \sqrt[3]{8x^{17} + x^{12}} dx = \int x^4 \cdot \sqrt[3]{8x^5 + 1} dx$$

i wykonujemy podstawienie  $t = 8x^5 + 1$  oraz formalnie  $dt = 40x^4 dx$ . Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int x^4 \cdot \sqrt[3]{8x^5 + 1} dx &= \frac{1}{40} \cdot \int 40x^4 \cdot \sqrt[3]{8x^5 + 1} dx = \frac{1}{40} \cdot \int \sqrt[3]{t} dt = \frac{1}{40} \cdot \frac{3 \cdot t^{4/3}}{4} + C = \\ &= \frac{3 \cdot t^{4/3}}{160} + C = \frac{3 \cdot (8x^5 + 1)^{4/3}}{160} + C. \end{aligned}$$

**61.** Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \ln(x^2 + 1) dx.$$

*Rozwiązanie:*

Dopisujemy do funkcji podcałkowej czynnik 1, po czym wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik 1 i różniczkując  $\ln(x^2 + 1)$ . Otrzymujemy:

$$\int \ln(x^2 + 1) dx = \int 1 \cdot \ln(x^2 + 1) dx = x \cdot \ln(x^2 + 1) - \int x \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2 \int dx + 2 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\
&= x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C.
\end{aligned}$$

62. Sprawdzić całkę

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^8 + 1)^n}$$

do całki  $I_{n-1}$ . Liczba całkowita  $n$  jest większa od 1.

**Wskazówka:**  $1 = x^8 + 1 - x \cdot x^7$ .

*Rozwiązanie:*

Przekształcenie i całkowanie przez części prowadzi do:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{dx}{(x^8 + 1)^n} = \int \frac{x^8 + 1 - x^8}{(x^8 + 1)^n} dx = \int \frac{x^8 + 1}{(x^8 + 1)^n} dx - \int x \cdot \frac{x^7}{(x^8 + 1)^n} dx = \\
&= I_{n-1} - x \cdot \frac{-1}{8(n-1) \cdot (x^8 + 1)^{n-1}} + \int \frac{-1}{8(n-1) \cdot (x^8 + 1)^{n-1}} dx = \\
&= I_{n-1} + \frac{x}{8(n-1) \cdot (x^8 + 1)^{n-1}} - \frac{1}{8(n-1)} \cdot I_{n-1} = \frac{8n-9}{8n-8} \cdot I_{n-1} + \frac{x}{8(n-1) \cdot (x^8 + 1)^{n-1}}.
\end{aligned}$$

63. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{-x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)}} dx.$$

**Wskazówka:** Wolno skorzystać ze wzoru  $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C$

*Rozwiązanie:*

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+3}{\sqrt{-x \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3)}} dx &= \int \frac{2x+3}{\sqrt{-(x \cdot (x+3)) \cdot ((x+1) \cdot (x+2))}} dx = \\
&= \int \frac{2x+3}{\sqrt{-(x^2+3x) \cdot (x^2+3x+2)}} dx,
\end{aligned}$$

a następnie podstawiamy  $t = x^2 + 3x + 1$  i formalnie  $dt = (2x + 3) dx$ . Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+3}{\sqrt{-(x^2+3x) \cdot (x^2+3x+2)}} dx &= \int \frac{2x+3}{\sqrt{-(x^2+3x+1-1) \cdot (x^2+3x+1+1)}} dx = \\
&= \int \frac{dt}{\sqrt{-(t-1) \cdot (t+1)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{-(t^2-1)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \\
&= \arcsin(x^2 + 3x + 1) + C.
\end{aligned}$$

64. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{2x^3 - 65x}{(x-8) \cdot (x-7) \cdot (x-4) \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+4) \cdot (x+7) \cdot (x+8)} dx.$$

Rozwiązanie:

Przepisujemy daną całkę w postaci

$$\begin{aligned} & \int \frac{2x^3 - 65x}{(x-8) \cdot (x-7) \cdot (x-4) \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+4) \cdot (x+7) \cdot (x+8)} dx = \\ & = \int \frac{2x^3 - 65x}{(x^2 - 64) \cdot (x^2 - 49) \cdot (x^2 - 16) \cdot (x^2 - 1)} dx = \\ & = \int \frac{2x^3 - 65x}{(x^2 - 64) \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 49) \cdot (x^2 - 16)} dx = \int \frac{2x^3 - 65x}{(x^4 - 65x^2 + 64) \cdot (x^4 - 65x^2 + 784)} dx, \end{aligned}$$

a następnie podstawiamy  $t = x^4 - 65x^2 + 64$  i formalnie  $dt = 2(2x^3 - 65x) dx$ . Otrzymujemy

$$\int \frac{x+2}{(x^4 - 65x^2 + 64) \cdot (x^4 - 65x^2 + 784)} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t \cdot (t+720)}.$$

Rozkład na ułamki proste prowadzi do

$$\frac{1}{t \cdot (t+720)} = \frac{1/720}{t} - \frac{1/720}{t+720},$$

co pozwala dokończyć obliczenia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t \cdot (t+720)} &= \frac{1}{1440} \cdot \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+720} dt = \frac{1}{1440} \cdot (\ln|t| - \ln|t+720|) + C = \\ &= \frac{1}{1440} \cdot (\ln|x^4 - 65x^2 + 64| - \ln|x^4 - 65x^2 + 784|) + C. \end{aligned}$$

Inna postać odpowiedzi:

$$\frac{1}{1440} \cdot (\ln|x^2 - 1| + \ln|x^2 - 64| - \ln|x^2 - 16| - \ln|x^2 - 49|) + C.$$

Jeszcze inna postać odpowiedzi:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1440} \cdot (\ln|x-1| + \ln|x+1| + \ln|x-8| + \ln|x+8| - \\ & - \ln|x-4| - \ln|x+4| - \ln|x-7| - \ln|x+7|) + C. \end{aligned}$$

I jeszcze taka postać odpowiedzi:

$$\frac{1}{1440} \cdot \ln \left| \frac{(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-8) \cdot (x+8)}{(x-4) \cdot (x+4) \cdot (x-7) \cdot (x+7)} \right| + C.$$

65. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^8 + x}.$$

**Wskazówka:** Przemnożyć licznik i mianownik przez  $x^6$ .

*Rozwiązanie:*

*Sposób I*

Przepisanie funkcji podcałkowej w postaci

$$\int \frac{dx}{x^8 + x} = \int \frac{x^6 dx}{x^{14} + x^7}$$

nasuwa pomysł podstawienia  $t = x^7$  i formalnie  $dt = 7x^6 dx$ , co prowadzi do

$$\begin{aligned} \int \frac{x^6 dx}{x^{14} + x^7} &= \frac{1}{7} \cdot \int \frac{dt}{t^2 + t} = \frac{1}{7} \cdot \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} dt = \frac{1}{7} \cdot (\ln|t| - \ln|t+1|) + C = \\ &= \frac{1}{7} \cdot (\ln|x^7| - \ln|x^7+1|) + C = \ln|x| - \frac{\ln|x^7+1|}{7} + C. \end{aligned}$$

*Sposób II*

Wykonując podstawienie  $x = t^{-1/7}$  i formalnie  $dx = -\frac{dt}{7t^{8/7}}$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^8 + x} &= -\frac{1}{7} \cdot \int \frac{dt}{(t^{-8/7} + t^{-1/7}) \cdot t^{8/7}} = -\frac{1}{7} \cdot \int \frac{dt}{t+1} = -\frac{1}{7} \cdot \ln|t+1| + C = \\ &= -\frac{1}{7} \cdot \ln|x^{-7} + 1| + C = -\frac{1}{7} \cdot \ln\left|\frac{x^7+1}{x^7}\right| + C = \frac{1}{7} \cdot \ln\left|\frac{x^7}{x^7+1}\right| + C. \end{aligned}$$

66. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{15x^4 - 1}{(x^4 + 1)^5} dx.$$

**Wskazówka:**  $15x^4 - 1 = 16 \cdot x \cdot x^3 - x^4 - 1$

*Rozwiązanie:*

Przekształcenie i całkowanie przez części prowadzi do:

$$\begin{aligned} \int \frac{15x^4 - 1}{(x^4 + 1)^5} dx &= \int \frac{16x^4 - x^4 - 1}{(x^4 + 1)^5} dx = 16 \cdot \int \frac{x^4}{(x^4 + 1)^5} dx - \int \frac{x^4 + 1}{(x^4 + 1)^5} dx = \\ &= 16 \cdot \int x \cdot \frac{x^3}{(x^4 + 1)^5} dx - \int \frac{dx}{(x^4 + 1)^4} = \\ &= 16 \cdot x \cdot \frac{-1}{16 \cdot (x^4 + 1)^4} - 16 \cdot \int 1 \cdot \frac{-1}{16 \cdot (x^4 + 1)^4} dx - \int \frac{dx}{(x^4 + 1)^4} = \\ &= -\frac{x}{(x^4 + 1)^4} + \int \frac{1}{(x^4 + 1)^4} dx - \int \frac{dx}{(x^4 + 1)^4} = -\frac{x}{(x^4 + 1)^4} + C. \end{aligned}$$