

W każdym z poniższych 20 zadań podaj wzór na funkcję różniczkowalną na całej prostej (lub w podanej dziedzinie) o podanym wzorze na pochodną oraz o podanej wartości w podanym punkcie.

26.  $f'(x) = (4x - 5)^{54}$   $f(1) = 1$   $f(x) = \frac{(4x - 5)^{55}}{220} + \frac{221}{220}$
27.  $f'(x) = \sqrt{3x + 1}$   $f(1) = 1$   $D_f = \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$   $f(x) = \frac{2}{9} \cdot (3x + 1)^{3/2} - \frac{7}{9}$
28.  $f'(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^4}$   $f(1) = 1$   $f(x) = \frac{-1}{6 \cdot (x^2 + 1)^3} + \frac{49}{48}$
29.  $f'(x) = \frac{x^3}{x^4 + 1}$   $f(0) = 7$   $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln(x^4 + 1) + 7$
30.  $f'(x) = \frac{1}{(3x - 5)^2 + 1}$   $f(2) = 0$   $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg}(3x - 5) - \frac{\pi}{12}$
31.  $f'(x) = \sqrt[5]{x}$   $f(1) = 1$   $f(x) = \frac{5x^{6/5}}{6} + \frac{1}{6}$
32.  $f'(x) = 200x \cdot (x^2 + 1)^{99}$   $f(0) = 0$   $f(x) = (x^2 + 1)^{100} - 1$
33.  $f'(x) = 6x^3 \cdot \sqrt{x^4 + 9}$   $f(2) = 2$   $f(x) = (x^4 + 9)^{3/2} - 123$
34.  $f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$   $f(-1) = -1$   $f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - 1$
35.  $f'(x) = \frac{4x^3 + 2x + 1}{(x^4 + x^2 + x + 1)^2}$   $f(1) = 1$   $f(x) = -\frac{1}{x^4 + x^2 + x + 1} + \frac{5}{4}$
36.  $f'(x) = \sqrt[7]{x + 1}$   $f(0) = 2$   $f(x) = \frac{7(x + 1)^{8/7}}{8} + \frac{9}{8}$
37.  $f'(x) = x^2 \cdot (x^3 + 1)^{100}$   $f(0) = 1$   $f(x) = \frac{(x^3 + 1)^{101}}{303} + \frac{302}{303}$
38.  $f'(x) = x^5 \cdot \sqrt[3]{x^6 + 7}$   $f(1) = 0$   $f(x) = \frac{(x^6 + 7)^{4/3}}{8} - 2$
39.  $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$   $f(0) = 0$   $f(x) = \ln(e^x + 1) - \ln 2$
40.  $f'(x) = \frac{2x^3 + x}{x^4 + x^2 + 1}$   $f(0) = 1$   $f(x) = \frac{\ln(x^4 + x^2 + 1)}{2} + 1$
41.  $f'(x) = \frac{2x^3 + x}{(x^4 + x^2 + 1)^2}$   $f(1) = 1$   $f(x) = -\frac{1}{2 \cdot (x^4 + x^2 + 1)} + \frac{7}{6}$

$$42. \quad f'(x) = \frac{2x^3 + x}{(x^4 + x^2 + 1)^3} \quad f(1) = 1 \quad f(x) = -\frac{1}{4 \cdot (x^4 + x^2 + 1)^2} + \frac{37}{36}$$

$$43. \quad f'(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \quad f(0) = 0 \quad f(x) = \arctg(x + 1) - \frac{\pi}{4}$$

W kolejnych dwóch zadaniach funkcje mają być ciągłe na  $\mathbb{R}$  i różniczkowalne na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$$44. \quad f'(x) = \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} \quad f(0) = 2 \quad f(x) = -3 \cdot \cos \sqrt[3]{x} + 5$$

$$45. \quad f'(x) = \frac{\sin \sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x^4}} \quad f(0) = 2 \quad f(x) = -5 \cdot \cos \sqrt[5]{x} + 7$$

46. Skonstruować funkcję różniczkowalną  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniającą warunki

$$f(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad f'(x) = \sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

*Rozwiązanie:*

Przepisujemy wzór na pochodną funkcji  $f$ :

$$f'(x) = \sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2} = \sqrt{(x^2 + x)^2} = |x^2 + x| = \begin{cases} x^2 + x & \text{dla } x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty) \\ -x^2 - x & \text{dla } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

Dla  $x \in (-\infty, -1]$  zachodzi  $f'(x) = x^2 + x$ , mamy więc<sup>1</sup>

$$f(x) = \int x^2 + x \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Dla  $x \in [-1, 0]$  zachodzi  $f'(x) = -x^2 - x$ , mamy więc

$$f(x) = \int -x^2 - x \, dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Dla  $x \in [0, +\infty)$  zachodzi  $f'(x) = x^2 + x$ , mamy więc

$$f(x) = \int x^2 + x \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_3.$$

Aby zagwarantować warunek  $f(0) = 0$ , należy przyjąć  $C_2 = C_3 = 0$ .

Aby zagwarantować zgodność określenia  $f(-1)$ , musi być

$$\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + C_1 = -\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + C_2,$$

<sup>1</sup>Dokładniej: Funkcja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określona wzorem  $g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1$  ma na całej prostej pochodną określoną wzorem  $g'(x) = x^2 + x$ , skąd wynika, że jeżeli  $f(x) = g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1$  dla  $x \in (-\infty, -1]$ , to  $f'(x) = g'(x) = x^2 + x$  dla  $x \in (-\infty, -1)$  oraz  $f'(x^-) = g'(x) = x^2 + x$  dla  $x = -1$ .

Co więcej, wzór  $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C_1$  dla  $x \in (-\infty, -1]$  definiuje wszystkie funkcje różniczkowalne  $f: (-\infty, -1] \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające warunki  $f'(x) = x^2 + x$  dla  $x \in (-\infty, -1)$  oraz  $f'(x^-) = x^2 + x$  dla  $x = -1$ .

czyli

$$\frac{1}{6} + C_1 = -\frac{1}{6},$$

skąd  $C_1 = -1/3$ .

Ostatecznie otrzymujemy

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} & \text{dla } x \in (-\infty, -1] \\ -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} & \text{dla } x \in (-1, 0) \\ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} & \text{dla } x \in [0, +\infty) \end{cases}$$

**47.** Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[n]{x^5+1} dx$$

dla wybranej przez Ciebie liczby naturalnej  $n$ .

*Rozwiązanie:*

Przyjmiemy  $n = 4$  i wykonamy podstawienie

$$t = \sqrt[n]{x^5+1},$$

czyli

$$t^7 = x^5 + 1$$

oraz formalnie

$$7t^6 dt = 5x^4 dx.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int x^4 \cdot \sqrt[n]{x^5+1} dx &= \frac{1}{5} \int \sqrt[n]{x^5+1} \cdot 5x^4 dx = \frac{1}{5} \int t \cdot 7t^6 dt = \frac{7}{5} \int t^7 dt = \frac{7}{5} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{7 \cdot t^8}{40} + C = \\ &= \frac{7}{40} \cdot (x^5+1)^{8/7} + C. \end{aligned}$$

48. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^n \cdot \sqrt[11]{x^7+1} dx$$

dla wybranej przez Ciebie liczby naturalnej  $n$ .

*Rozwiązanie:*

Przyjmujemy  $n = 6$  i wykonamy podstawienie

$$t = \sqrt[11]{x^7+1},$$

czyli

$$t^{11} = x^7 + 1$$

oraz formalnie

$$11t^{10} dt = 7x^6 dx.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int x^6 \cdot \sqrt[11]{x^7+1} dx &= \frac{1}{7} \int \sqrt[11]{x^7+1} \cdot 7x^6 dx = \frac{1}{7} \int t \cdot 11t^{10} dt = \frac{11}{7} \int t^{11} dt = \frac{11}{7} \cdot \frac{t^{12}}{12} + C = \\ &= \frac{11 \cdot t^{12}}{84} + C = \frac{11}{84} \cdot (x^7+1)^{12/11} + C. \end{aligned}$$

49. Obliczyć całkę nieoznaczoną  $\int \frac{dx}{x + \sqrt[9]{x}}$ .

*Rozwiązanie:*

*Sposób I*

Wykonując podstawienie  $x = t^9$  i formalnie  $dx = 9t^8 dt$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt[9]{x}} &= 9 \cdot \int \frac{t^8 dt}{t^9 + t} = 9 \cdot \int \frac{t^7 dt}{t^8 + 1} = \frac{9}{8} \cdot \int \frac{8t^7 dt}{t^8 + 1} = \frac{9}{8} \cdot \ln(t^8 + 1) + C = \\ &= \frac{9}{8} \cdot \ln(x^{8/9} + 1) + C. \end{aligned}$$

*Sposób II*

Wykonując podstawienie  $x = t^{9/8}$  i formalnie  $dx = \frac{9t^{1/8} dt}{8}$ , otrzymujemy

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt[9]{x}} = \frac{9}{8} \cdot \int \frac{t^{1/8} dt}{t^{9/8} + t^{1/8}} = \frac{9}{8} \cdot \int \frac{dt}{t+1} = \frac{9}{8} \cdot \ln|t+1| + C = \frac{9}{8} \cdot \ln(x^{8/9} + 1) + C.$$

50. Wiedząc, że

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2 \arcsin x \, dx.$$

*Rozwiązanie:*

Wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik  $x^2$  i różniczkując  $\arcsin x$ . Otrzymujemy:

$$\int x^2 \cdot \arcsin x \, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \arcsin x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

W ostatniej całce wykonujemy podstawienie  $t = 1 - x^2$ , w którym stosujemy formalny wzór  $dt = -2x \, dx$ . Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx &= -\frac{1}{6} \cdot \int \frac{x^2 \cdot (-2x) \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{6} \cdot \int \frac{(1-t) \, dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{6} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{t}} - \sqrt{t} \, dt = \\ &= -\frac{\sqrt{t}}{3} + \frac{t^{3/2}}{9} + C_1 = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{9} + C_1. \end{aligned}$$

W konsekwencji

$$\int x^2 \cdot \arcsin x \, dx = \frac{x^3 \cdot \arcsin x}{3} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{3} - \frac{(1-x^2)^{3/2}}{9} + C.$$

51. Wiedząc, że

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \arcsin x \, dx.$$

*Rozwiązanie:*

Dopisujemy do funkcji podcałkowej czynnik 1, po czym wykonujemy całkowanie przez części całkując czynnik 1 i różniczkując  $\arcsin x$ . Otrzymujemy:

$$\int \arcsin x \, dx = \int 1 \cdot \arcsin x \, dx = x \cdot \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

W ostatniej całce wykonujemy podstawienie  $t = 1 - x^2$ , w którym stosujemy formalny wzór  $dt = -2x \, dx$ . Otrzymujemy:

$$\int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{-2x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C_1 = -\sqrt{1-x^2} + C_1.$$

W konsekwencji

$$\int \arcsin x \, dx = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$