25. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=6x+6 \qquad \text{dla} \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=x$ dla $x\in\{-1,0,2\}$. Wyznaczyć $f(3)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3+3x^2\right)=6x+6\,,$$

a funkcjami o drugiej pochodnej równej 0 są funkcje liniowe, funkcja f na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ jest określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2+Ax+B & \text{dla} \quad x\in(-\infty,1) \\ x^3+3x^2+Cx+D & \text{dla} \quad x\in(1,+\infty) \end{cases}$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 1 wymaga istnienia granicy w tym punkcie, czyli zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x=1$. Musi więc zachodzić równość

$$A+B=C+D\,. \tag{$\clubsuit$}$$

Warunki $f(x)=x$ dla $x\in\{-1,0,2\}$ sprowadzają się odpowiednio do

$$-1=2-A+B\,, \tag{$\diamondsuit$}$$

$$0=B\,, \tag{$\heartsuit$}$$

$$2=20+2C+D\,. \tag{$\spadesuit$}$$

Rozwiązanie układu otrzymanych czterech równań ($\clubsuit$), ($\diamondsuit$), ($\heartsuit$) i ($\spadesuit$) prowadzi do

$$A=3\,, \qquad B=0\,, \qquad C=-21\,, \qquad D=24\,.$$

Ostatecznie

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2+3x & \text{dla} \quad x\in(-\infty,1) \\ x^3+3x^2-21x+24 & \text{dla} \quad x\in[1,+\infty) \end{cases}$$

Zatem $f(3)=15$.