263. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^\pi \sin^{2020} x - \cos^{2020} x \, dx \,.$$

Rozwiązanie:

Z równości

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

oraz

$$|\sin(x+\pi)| = |\sin x|$$

otrzymujemy

$$\int_0^\pi \cos^{2020} x \, dx = \int_0^\pi \sin^{2020}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2020}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2020}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{2020}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2020}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^{2020} x \, dx + \int_0^{\pi/2} \sin^{2020} x \, dx =$$

$$= \int_0^\pi \sin^{2020} x \, dx \,,$$

skąd wynika, że dana w zadaniu całka ma wartość zero.

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka oznaczona ma wartość 0.

Uwaga: Idea powyższych rachunków jest następująca: Funkcje $\sin^{2020}$ i $\cos^{2020}$ są całkowane po pełnym okresie równym π, a przy tym jest to ta sama funkcja, tylko przesunięta o $\pi/2$.

264. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty \frac{x^5-1}{x^7+1} \, dx \,.$$

Wskazówka: Wykonać podstawienie $x=1/t$ albo $x=e^t$.

Rozwiązanie:

Sposób I

Najpierw udowodnimy zbieżność danej całki. W tym celu zapiszemy ją w postaci sumy dwóch całek, a następnie zastosujemy kryterium porównawcze dla udowodnienia zbieżności składnika będącgo całką niewłaściwą o nieujemnej fukcji podcałkowej:

$$\int_0^\infty \frac{x^5-1}{x^7+1} \, dx = \int_0^1 \frac{x^5-1}{x^7+1} \, dx + \int_1^\infty \frac{x^5-1}{x^7+1} \, dx = -\int_0^1 \frac{1-x^5}{x^7+1} \, dx + \int_1^\infty \frac{x^5-1}{x^7+1} \, dx \,,$$

$$\int_1^\infty \frac{x^5-1}{x^7+1} \, dx \leqslant \int_1^\infty \frac{x^5-0}{x^7+0} \, dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx < +\infty \,.$$

Następnie wykonamy podstawienie $x=1/t$ i formalnie $dx=-dt/t^2$. Otrzymujemy:

$$I=\int_0^\infty \frac{x^5-1}{x^7+1}\,dx=\int_\infty^0 \frac{t^{-5}-1}{t^{-7}+1}\cdot\frac{-dt}{t^2}=\int_0^\infty \frac{t^{-5}-1}{t^{-5}+t^2}\,dt=\int_0^\infty \frac{(t^{-5}-1)\cdot t^5}{(t^{-5}+t^2)\cdot t^5}\,dt=\int_0^\infty \frac{1-t^5}{1+t^7}\,dt=-I\,,$$

skąd $I=-I$, czyli $I=0$.

Odpowiedź

Dana całka jest zbieżna i ma wartość 0.

Sposób II

Dowodzimy zbieżności całki jak w sposobie I, a następnie wykonujemy podstawienie $x=e^t$, czyli $t=\ln x$, i formalnie $dx=e^t\,dt$. Otrzymujemy:

$$\int_0^\infty \frac{x^5-1}{x^7+1}\,dx=\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{5t}-1}{e^{7t}+1}\cdot e^t\,dt=\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{6t}-e^t}{e^{7t}+1}\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^\infty \frac{(e^{6t}-e^t)\cdot e^{-7t/2}}{(e^{7t}+1)\cdot e^{-7t/2}}\,dt=\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{5t/2}-e^{-5t/2}}{e^{7t/2}+e^{-7t/2}}\,dt\,,$$

co jest równe 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera.

265. Obliczyć wartość całki

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\,dx\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $x=1/t$, czyli $t=1/x$ i formalnie $dx=\dfrac{-dt}{t^2}$. Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\,dx=-\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{arctg}t}{t^3}\,dt=-\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^3}\cdot\mathrm{arctg}t\,dt=$$

$$=\frac{1}{2t^2}\cdot\mathrm{arctg}t\Bigg|_{t=-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\cdot\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\,dt=\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{3}{2}\cdot\frac{-\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2+1}\,dt=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{t}-\mathrm{arctg}t\Bigg|_{t=-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}=$$

$$=\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\,.$$

Dlaczego powyższe rozwiązanie jest błędne ???

Podaj poprawne rozwiązanie.

Rozwiązanie:

BŁĘDY:

1° Wykonane podstawienie nie przeprowadza przedziału całkowania $\left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$ na przedział $\left[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right]$.

2° Uzyskana w wyniku błędnego podstawienia całka niewłaściwa jest rozbieżna. Funkcja podcałkowa ma osobliwość w punkcie 0.

Rozwiązania poprawne:

Sposób I:

Funkcja podcałkowa jest parzysta, a zatem

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx = 2\cdot\int_{0}^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx\,.$$

Wykonujemy podstawienie $x=1/t$, czyli $t=1/x$ i formalnie $dx=\frac{-dt}{t^2}$. Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\int_{0}^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx = -\int_{\infty}^{1/\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg}t}{t^3}\,dt = \int_{1/\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1}{t^3}\cdot\operatorname{arctg}t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2t^2}\cdot\operatorname{arctg}t\Bigg|_{t=1/\sqrt{3}}^{\infty} + \frac{1}{2}\cdot\int_{1/\sqrt{3}}^{\infty}\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2t^2}\cdot\operatorname{arctg}t\right) + \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\cdot\int_{1/\sqrt{3}}^{\infty}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= 0 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{t} - \operatorname{arctg}t\Bigg|_{t=1/\sqrt{3}}^{\infty}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki jest równa $\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$.

Sposób II:

Funkcja podcałkowa jest parzysta, a zatem

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx = 2\cdot\int_{0}^{\sqrt{3}} x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,dx\,.$$

Korzystamy z równości

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}x \qquad \text{dla } x>0\,.$$

Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arctg}\frac{1}{x}\,dx=\int_0^{\sqrt{3}} x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x\right)\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^{\sqrt{3}} x\,dx-\int_0^{\sqrt{3}} x\cdot\mathrm{arctg}x\,dx=$$

$$=\frac{\pi x^2}{4}\Bigg|_{x=0}^{\sqrt{3}}-\frac{x^2\cdot\mathrm{arctg}x}{2}\Bigg|_{x=0}^{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{x^2+1}\,dx=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\sqrt{3}}1-\frac{1}{x^2+1}\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(x-\mathrm{arctg}x\Bigg|_{x=0}^{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Odpowiedź: Wartość podanej całki jest równa $\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$.

266. Funkcje $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są określone wzorami

$$f(x)=e^{x^9}\qquad\text{oraz}\qquad g(x)=e^{x^7}\,.$$

Podaj wartość ilorazu pochodnych

$$\frac{f^{(63)}(0)}{g^{(63)}(0)}\,.$$

Odpowiedź: 72

267. Funkcje $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są określone wzorami

$$f(x)=e^{x^{12}}\qquad\text{oraz}\qquad g(x)=e^{x^{10}}\,.$$

Podaj wartość ilorazu pochodnych

$$\frac{f^{(60)}(0)}{g^{(60)}(0)}\,.$$

Odpowiedź: 6

268. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=e^{x^2}\,.$$

Podaj wartość $f^{(30)}(0)$.

Odpowiedź: $30!/15!$

269. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=e^{x^3}\,.$$

Podaj wartość $f^{(30)}(0)$.

Odpowiedź: $30!/10!$

270. Podaj wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{99n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}\,.$$

Odpowiedź: 18

271. Podaj wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{30n}\frac{1}{\sqrt{n^2+4kn}}\,.$$

Odpowiedź: 5

272. Podaj wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{9n}\frac{n}{k^2}\,.$$

Odpowiedź: 8/9

273. Podaj wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{11n}\frac{n^2}{k^3}\,.$$

Odpowiedź: 60/121

274. Dla podanej liczby b podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych a, że potęgowy szereg zespolony

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n}}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny dla $z=a+bi$.
Uwaga: Istotną częścią zadania jest określenie przynależności do przedziału jego końców.

a) $b=0, \quad a\in\boldsymbol{[-1,\,1)}$

b) $b=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}, \quad a\in\left[\boldsymbol{-\frac{1}{3},\,\frac{1}{3}}\right]$

c) $b=\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a\in\left(\boldsymbol{-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}}\right]$

d) $b=\frac{1}{2}, \quad a\in\left[\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2},\,\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]$

275. Wiadomo, że dla funkcji różniczkowalnej $f:[a,\,b]\to\mathbb{R}$, gdzie $0\leqslant a<b$, pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej

$$\{(x,\,f(x)):\; x\in[a,\,b]\}$$

wokół osi OY (krzywa jest w płaszczyźnie XY) jest równe

$$2\pi\cdot\int\limits_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,.$$

Wyznaczyć pole powierzchni (fragmentu paraboloidy obrotowej)

$$\left\{(x,\,y,\,z):\ x^2+y^2=z\leqslant 7\right\}.$$

Wskazówka: Dana w zadaniu powierzchnia obrotowa powstaje przez obrót wokół osi OZ łuku paraboli o równaniu $z=x^2$, $0\leqslant x\leqslant ???$, umieszczonego w płaszczyźnie XZ.
Rozwiązanie:

Ponieważ dana w zadaniu paraboloida obrotowa powstaje przez obrót wokół osi OZ łuku paraboli o równaniu $z=x^2$, $0\leqslant x\leqslant\sqrt{7}$, umieszczonego w płaszczyźnie XZ, przyjmiemy w podanym wzorze $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=\sqrt{7}$.

Biorąc pod uwagę, że $f'(x)=2x$ oraz wykonując po drodze podstawienie $t=1+4x^2$, czyli formalnie $dt=8x\,dx$, otrzymujemy:

$$2\pi\cdot\int\limits_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=2\pi\cdot\int\limits_0^{\sqrt{7}} x\cdot\sqrt{1+4x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}\cdot\int\limits_1^{\sqrt{29}}\sqrt{t}\,dt=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{3/2}\Bigg|_{t=1}^{29}=$$

$$=\frac{\pi}{6}\cdot t^{3/2}\Bigg|_{t=1}^{29}=\frac{\pi}{6}\cdot 29^{3/2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\cdot\left(29\sqrt{29}-1\right).$$

Odpowiedź:
Pole danej w zadaniu powierzchni obrotowej jest równe $\frac{\pi}{6}\cdot\left(29\sqrt{29}-1\right)$.

276. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^3 15x\cdot\sqrt{x+1}\,dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt{x+1},\qquad x=t^2-1$$

i formalnie

$$dx=2t\,dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=3$ odpowiada $t=2$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[0,\,3]$ odpowiada przedziałowi $t\in[1,\,2]$.

Otrzymujemy

$$\int\limits_0^3 15x\cdot\sqrt{x+1}\,dx=\int\limits_1^2 15\cdot\left(t^2-1\right)\cdot t\cdot 2t\,dt=30\cdot\int\limits_1^2 t^4-t^2\,dt=30\cdot\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\Bigg|_{t=1}^{2}\right)=$$

$$=30\cdot\left(\frac{32-1}{5}-\frac{8-1}{3}\right)=6\cdot 31-10\cdot 7=186-70=116\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 116.

277. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2x+2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Przekształcamy mianownik funkcji podcałkowej

$$\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2x+2}=\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2x+1+1}=\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(x-1)^2+1},$$

a następnie wykonujemy podstawienie

$$t=x-1, \qquad x=t+1$$

i formalnie

$$dx=dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=-1$, a $x=1$ odpowiada $t=0$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[0,\,1]$ odpowiada przedziałowi $t\in[-1,\,0]$.

Otrzymujemy

$$\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(x-1)^2+1}=\int\limits_{-1}^0 \frac{(t+1)\,dt}{t^2+1}=\int\limits_{-1}^0 \frac{t\,dt}{t^2+1}+\int\limits_{-1}^0 \frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\left(\frac{\ln(t^2+1)}{2}\Bigg|_{t=-1}^{0}\right)+\left(\operatorname{arctg} t\Bigg|_{t=-1}^{0}\right)=$$

$$=\frac{\ln 1}{2}-\frac{\ln 2}{2}+\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}(-1)=0-\frac{\ln 2}{2}+0-\frac{-\pi}{4}=$$

$$=-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $-\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}$.

278. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3-x^2}=\frac{1}{(x-1)\cdot x^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x^2}+\frac{D}{x},$$

$$1=A\cdot x^2+B\cdot(x-1)+D\cdot(x-1)\cdot x,$$

$$1=Ax^2+Bx-B+Dx^2-Dx,$$

$$\begin{cases} 0 &= A+D \\ 0 &= B-D \\ 1 &= -B\,, \end{cases}$$

skąd $B=-1$, $D=-1$ i $A=1$. W konsekwencji

$$\int \frac{dx}{x^3-x^2} = \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\,dx = \ln|x-1| + \frac{1}{x} - \ln|x| + C\,.$$

279. Obliczyć wartość granicy (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+8}+\frac{9}{n^3+27}+\ldots+\frac{k^2}{n^3+k^3}+\ldots+\frac{4n^2}{n^3+8n^3}\right).$$

Rozwiązanie:

Przekształcenie danej w zadaniu granicy prowadzi do

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{k^2}{n^3+k^3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{2n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right),$$

gdzie

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}\,.$$

Ponieważ uzyskana granica jest granicą ciągu sum Riemanna dla funkcji ciągłej f na przedziale $[0,2]$ odpowiadających podziałom tego przedziału na $2n$ przedziałów długości $1/n$, możemy zapisać jej wartość w postaci podanej niżej całki oznaczonej. Korzystając ze wzoru

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C$$

obliczamy wartość tej całki:

$$\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\cdot\int_0^2 \frac{3x^2\,dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\cdot\ln\left|x^3+1\right|\Big|_{x=0}^{2} = \frac{1}{3}\cdot(\ln 9 - \ln 1) = \frac{2\ln 3}{3}\,.$$

Odpowiedź: Podana granica ma wartość $\frac{2\ln 3}{3}$.

280. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int_0^{\sqrt{3}} x^3\cdot\mathrm{arctg}\,x\,dx$. Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\pi$, gdzie w liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Całkując przez części otrzymujemy

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^3\cdot\mathrm{arctg}\,x\,dx = \frac{x^4}{4}\cdot\mathrm{arctg}\,x\Big|_{x=0}^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{9}{4}\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\cdot\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^4-1+1}{1+x^2}\,dx =$$

$$=\frac{9}{4}\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{4}\cdot\int_0^{\sqrt{3}} x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x\Bigg|_{x=0}^{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{12}=\frac{8\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $\frac{2\pi}{3}$.

281. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^{2017}n^{2016}}{n^{2/3}+n^{3/2}}$.

Rozwiązanie:

Skorzystamy z kryterium zbieżności bezwzględnej oraz z kryterium porównawczego:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin^{2017}n^{2016}}{n^{2/3}+n^{3/2}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\sin^{2017}n^{2016}\right|}{n^{2/3}+n^{3/2}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}+n^{3/2}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{0+n^{3/2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}<+\infty\,,$$

bo $3/2>1$.

282. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx$.

Rozwiązanie:

Oznaczamy daną całkę przez $I(x)$ i całkujemy dwukrotnie przez części:

$$I(x)=\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx=\frac{e^{2x}}{2}\cdot\sin 3x-\int\frac{e^{2x}}{2}\cdot 3\cos 3x\,dx=\frac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{2}-\frac{3}{2}\cdot\int e^{2x}\cdot\cos 3x\,dx=$$

$$=\frac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{2}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2}\cdot\cos 3x-\int\frac{e^{2x}}{2}\cdot(-3\sin 3x)\,dx\right)=$$

$$=\frac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{2}-\frac{3\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x}{4}-\frac{9}{4}\cdot\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx=\frac{e^{2x}\cdot\sin 3x}{2}-\frac{3\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x}{4}-\frac{9}{4}\cdot I(x)\,,$$

co prowadzi do

$$4\cdot I(x)=2\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x-3\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x-9\cdot I(x)\,,$$

skąd

$$I(x)=\frac{2\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x-3\cdot e^{2x}\cdot\cos 3x}{13}+C\,.$$

283. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8^n+n^{11}}}{\sqrt{4^n+n^{9999}}}\,.$$

Rozwiązanie:

Stosując kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego dla ciągów otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{11}}{8^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{9999}}{4^n}=0\,.$$

Standardowe rachunki są tu pominięte, ale w rozwiązaniu muszą się znaleźć wraz z powołaniem się na odpowiednie kryterium.

Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8^n+n^{11}}}{\sqrt{4^n+n^{9999}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot\sqrt[3]{1+\frac{n^{11}}{8^n}}}{2^n\cdot\sqrt{1+\frac{n^{9999}}{4^n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{n^{11}}{8^n}}}{\sqrt{1+\frac{n^{9999}}{4^n}}}=\frac{\sqrt[3]{1+0}}{\sqrt{1+0}}=1\,.$$

284. Funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma pochodną daną wzorem $f'(x)=|x|$. Ponadto wiadomo, że $f(-1)=-1$. Wyznaczyć $f(1)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$f'(x)=\begin{cases}-x & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,0)\\ x & \text{dla} \quad x\in[0,\,+\infty)\end{cases}$$

otrzymujemy

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+C & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,0)\\ \dfrac{x^2}{2}+D & \text{dla} \quad x\in[0,\,+\infty)\end{cases}$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 0 wymaga zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x=0$, czyli musi zachodzić równość $C=D$.

Warunek $f(-1)=-1$ sprowadza się do $C=-1/2$.

Ostatecznie

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2} & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,0)\\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2} & \text{dla} \quad x\in[0,\,+\infty)\end{cases}$$

Zatem $f(1)=0$.

285. Obliczyć całkę oznaczoną $\displaystyle\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $x=t^6$ i formalnie $dx=6t^5\,dt$, otrzymujemy:

$$\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int_1^2\frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}=6\cdot\int_1^2\frac{t^3\,dt}{t+1}=6\cdot\int_1^2\frac{t^3+1}{t+1}-\frac{1}{t+1}\,dt=6\cdot\int_1^2 t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\,dt=$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|\Bigg|_{t=1}^{2}=16-12+12-6\ln3-2+3-6+6\ln2=11-6\ln3+6\ln2\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $11-6\ln3+6\ln2=11+6\ln\dfrac{2}{3}$.

286. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty} n^p \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{\sqrt{n}+\sqrt{9n+k}}$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$n^p \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{\sqrt{n}+\sqrt{9n+k}} = n^{p+1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{\sqrt{n}+\sqrt{9n+k}} = n^{p+5/4} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{1+\sqrt{9+\frac{k}{n}}} =$$

$$= n^{p+5/4} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{55n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{9+x}}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $55n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej, przy obliczaniu której korzytsamy z podstawienia $t = \sqrt{1+\sqrt{9+x}}$, czyli $x = \left(t^2-1\right)^2 - 9 = t^4 - 2t^2 - 8$ i formalnie $dx = \left(4t^3-4t\right)\, dt$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{55n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^{55} f(x)\, dx = \int_0^{55} \sqrt{1+\sqrt{9+x}}\, dx = \int_2^3 t \cdot \left(4t^3-4t\right)\, dt = 4 \cdot \int_2^3 t^4 - t^2\, dt =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{t=2}^{3} = 4 \cdot \left(\frac{243-32}{5} - \frac{27-8}{3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{211}{5} - \frac{19}{3}\right) = 4 \cdot \frac{633-95}{15} = 4 \cdot \frac{538}{15} =$$

$$= \frac{2152}{15}.$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+5/4}$ będzie równy 0, czyli dla $p = -5/4$.

Odpowiedź: Dla $p = -5/4$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $2152/15$.

287. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1}\, dx.$$

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t = \sqrt[3]{x+1}$, czyli $x = t^3 - 1$ i formalnie $dx = 3t^2\, dt$, otrzymujemy

$$\int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1}\, dx = \int \left(t^3-1\right)^2 \cdot t \cdot 3t^2\, dt = 3 \cdot \int t^9 - 2t^6 + t^3\, dt = 3 \cdot \left(\frac{t^{10}}{10} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^4}{4}\right) + C =$$

$$= \frac{3t^{10}}{10} - \frac{6t^7}{7} + \frac{3t^4}{4} + C = \frac{3 \cdot (x+1)^{10/3}}{10} - \frac{6 \cdot (x+1)^{7/3}}{7} + \frac{3 \cdot (x+1)^{4/3}}{4} + C.$$

Uwaga: Można też całkować przez części.

288. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^e x^2 \cdot \ln x \, dx \, .$$

Rozwiązanie:

Wykonując całkowanie przez części otrzymujemy:

$$\int_1^e x^2 \cdot \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x \Bigg|_{x=1}^{e} - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \int_1^e x^2 \, dx = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{x^3}{9} \Bigg|_{x=1}^{e} \right) =$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} \, .$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}$.

289. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} \, .$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1+k/n}{1+(k/n)^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) ,$$

gdzie $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na przedziały równej długości dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{2} \Bigg|_{x=0}^{1} =$$

$$= \operatorname{arctg} 1 + \frac{\ln 2}{2} - \operatorname{arctg} 0 - \frac{\ln 2}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} \, .$$

Otrzymujemy więc

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} \, .$$

290. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x) = 2 \qquad \text{dla} \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{3\} \, .$$

Ponadto wiadomo, że $f(x) = x$ dla $x \in \{0, 2, 4\}$. Wyznaczyć $f(5)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\frac{d^2}{dx^2}\,x^2=2\,,$$

a funkcjami o drugiej pochodnej równej 0 są funkcje liniowe, funkcja f jest określona wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x^2+Ax+B & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,3) \\ x^2+Cx+D & \text{dla} \quad x\in[3,\,+\infty) \end{cases} \tag{$*$}$$

Przy tym ciągłość funkcji f w punkcie 3 wymaga zgodności wartości określonych podanymi wyżej wzorami dla $x=3$, czyli musi zachodzić równość

$$3A+B=3C+D\,. \tag{$\clubsuit$}$$

Warunki $f(x)=x$ dla $x\in\{0,\,2,\,4\}$ sprowadzają się odpowiednio do

$$0=B\,, \tag{$\diamondsuit$}$$

$$2=4+2A+B\,, \tag{$\heartsuit$}$$

$$4=16+4C+D\,. \tag{$\spadesuit$}$$

Rozwiązanie układu otrzymanych czterech równań ($\clubsuit$), ($\diamondsuit$), ($\heartsuit$) i ($\spadesuit$) prowadzi do

$$A=-1\,, \qquad B=0\,, \qquad C=-9\,, \qquad D=24\,.$$

Ostatecznie

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x & \text{dla} \quad x\in(-\infty,\,3) \\ x^2-9x+24 & \text{dla} \quad x\in[3,\,+\infty) \end{cases} \tag{$**$}$$

Zatem $f(5)=4$.

291. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^9 \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}\,dx\,.$$

Pamiętaj o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Podstawiamy $x=t^4$, czyli formalnie $dx=4t^3\,dt$:

$$\int_1^9 \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}\,dx=\int_1^{\sqrt{3}} 4t^3\cdot\operatorname{arctg}t\,dt\,.$$

Następnie wykonujemy całkowanie przez części:

$$\int_1^{\sqrt{3}} 4t^3\cdot\operatorname{arctg}t\,dt=t^4\cdot\operatorname{arctg}t\,\Big|_{t=1}^{\sqrt{3}}-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t^4}{t^2+1}\,dt=$$

$$=9\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\operatorname{arctg}1-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t^4-1+1}{t^2+1}\,dt=9\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\int_1^{\sqrt{3}}t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\,dt=$$

$$=3\pi-\frac{\pi}{4}-\left(\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg}t\Big|_{t=1}^{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=3\pi-\frac{\pi}{4}-\left(\frac{3\cdot\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\frac{1}{3}+1-\operatorname{arctg}1\right)=$$

$$=3\pi-\frac{\pi}{4}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}=3\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}=\frac{8\pi}{3}-\frac{2}{3}.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka ma wartość $\frac{8\pi}{3}-\frac{2}{3}$.

292. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty} n^p\cdot\left(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+\sqrt[3]{n+3}+\sqrt[3]{n+4}+\ldots+\sqrt[3]{8n-2}+\sqrt[3]{8n-1}+\sqrt[3]{8n}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$\sum_{k=1}^{7n} n^p\cdot\sqrt[3]{n+k}=n^{p+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{7n}\sqrt[3]{n+k}=n^{p+4/3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{7n}\sqrt[3]{1+\frac{k}{n}}=n^{p+4/3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{7n}f\left(1+\frac{k}{n}\right),$$

gdzie $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $7n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{7n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_1^8 f(x)\,dx=\int_1^8\sqrt[3]{x}\,dx=\frac{3}{4}\cdot x^{4/3}\Big|_{x=1}^{8}=\frac{3}{4}\cdot16-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot15=\frac{45}{4}.$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+4/3}$ będzie równy 0, czyli dla $p=-4/3$.

Odpowiedź: Dla $p=-4/3$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $45/4$.

293. W każdym z zadań **293.1-293.5** podaj w postaci uproszczonej normę supremum funkcji f określonej podanym wzorem w podanej dziedzinie.

Przypomnienie: $\|f\|=\sup\{|f(x)|: x\in D_f\}$.

293.1. $f(x)=x^2-5$, $D_f=(-1,3)$, $\|f\|=\mathbf{5}$

293.2. $f(x)=x^3-15$, $D_f=(-1,3)$, $\|f\|=\mathbf{16}$

293.3. $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+5}$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=\mathbf{1/4}$

293.4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=\mathbf{1}$

293.5. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+7}$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=\mathbf{4/3}$

---

294. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2-4x+4}}\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci niezawierającej „arctg”.

Rozwiązanie:

Zauważamy, że

$$\int_1^3 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2-4x+4}}=\int_1^3 \frac{dx}{1+\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2}$$

i wykonujemy podstawienie $t=\sqrt[3]{x-2}$, czyli $x=t^3+2$ i formalnie $dx=3t^2\,dt$. Otrzymujemy

$$\int_1^3 \frac{dx}{1+\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2}=\int_{-1}^1 \frac{3t^2\,dt}{1+t^2}=3\cdot\int_{-1}^1 \frac{t^2+1-1\,dt}{1+t^2}=3\cdot\int_{-1}^1 dt-3\cdot\int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=6-3\cdot\left(\operatorname{arctg} t\Big|_{t=-1}^{1}\right)=6-3\cdot\operatorname{arctg}1+3\cdot\operatorname{arctg}(-1)=6-3\cdot\frac{\pi}{4}+3\cdot\frac{-\pi}{4}=6-\frac{3\pi}{2}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość $6-\dfrac{3\pi}{2}$.

295. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+4}\,.$$

Wskazówka: $n^4+4=(n^2-2n+2)\cdot(n^2+2n+2)$.

Rozwiązanie:

Rozłóżmy na ułamki proste wyraz ogólny szeregu:

$$\frac{n}{n^4+4}=\frac{n}{(n^2-2n+2)\cdot(n^2+2n+2)}=\frac{An+B}{n^2-2n+2}+\frac{Cn+D}{n^2+2n+2}\,,$$

$$n=(An+B)\cdot\left(n^2+2n+2\right)+(Cn+D)\cdot\left(n^2-2n+2\right)\,,$$

$$n=An^3+2An^2+2An+Bn^2+2Bn+2B+Cn^3-2Cn^2+2Cn+Dn^2-2Dn+2D\,,$$

$$\begin{cases} 0 = 2B+2D\,, & (n^0)\\ 1 = 2A+2B+2C-2D\,, & (n^1)\\ 0 = 2A+B-2C+D\,, & (n^2)\\ 0 = A+C\,. & (n^3)\end{cases}$$

Z pierwszego i czwartego równania dostajemy odpowiednio $D=-B$ oraz $C=-A$, co prowadzi kolejno do

$$\begin{cases} 1 = 2A+2B-2A+2B\,, \\ 0 = 2A+B+2A-B\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 4B\,, \\ 0 = 4A\,, \end{cases}$$

$$B=1/4, \qquad D=-1/4, \qquad A=C=0\,.$$

Zatem

$$\frac{n}{n^4+4}=\frac{1/4}{n^2-2n+2}-\frac{1/4}{n^2+2n+2}=\frac{1/4}{(n-1)^2+1}-\frac{1/4}{(n+1)^2+1}\,.$$

W konsekwencji sumy częściowe danego szeregu wyrażają się wzorem

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{n^4+4}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1/4}{(n-1)^2+1}-\frac{1/4}{(n+1)^2+1}\right)=$$

$$=\left(\frac{1/4}{0^2+1}-\frac{1/4}{2^2+1}\right)+\left(\frac{1/4}{1^2+1}-\frac{1/4}{3^2+1}\right)+\left(\frac{1/4}{2^2+1}-\frac{1/4}{4^2+1}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1/4}{(N-3)^2+1}-\frac{1/4}{(N-1)^2+1}\right)+\left(\frac{1/4}{(N-2)^2+1}-\frac{1/4}{N^2+1}\right)+$$

$$+\left(\frac{1/4}{(N-1)^2+1}-\frac{1/4}{(N+1)^2+1}\right)=\frac{1/4}{0^2+1}+\frac{1/4}{1^2+1}-\frac{1/4}{N^2+1}-\frac{1/4}{(N+1)^2+1}\to\frac{3}{8}$$

przy $N\to\infty$.

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa 3/8.

296. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\frac{1}{49}-\frac{1}{64}+\frac{1}{81}-\frac{1}{100}+\frac{1}{121}-\frac{1}{144}+\frac{1}{169}-\ldots$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ dany szereg jest bezwzględnie zbieżny, możemy beztrosko zmieniać kolejność jego wyrazów, a nawet rozdzielać go na sumę dwóch szeregów. W konsekwencji otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}-2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}\,.$$

Odpowiedź: Suma szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ jest równa $\frac{\pi^2}{12}$.

297. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(4n-3)\cdot(4n+1)}{(3n-2)\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}\,.$$

Rozwiązanie:

Aby udowodnić zbieżność szeregu danego w treści zadania, skorzystamy z kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

W tym celu musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne - oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4n-3)\cdot(4n+1)}{(3n-2)\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(4-\frac{3}{n}\right)\cdot\left(4+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}{\left(3-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(3+\frac{4}{n}\right)}=\frac{4\cdot4\cdot0}{3\cdot3\cdot3}=0\,.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.
Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{(4n-3)\cdot(4n+1)}{(3n-2)\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}\geqslant\frac{(4n+1)\cdot(4n+5)}{(3n+1)\cdot(3n+4)\cdot(3n+7)}\,,$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\frac{4n-3}{3n-2}\geqslant\frac{4n+5}{3n+7}\,,$$

$$(4n-3)\cdot(3n+7)\geqslant(4n+5)\cdot(3n-2)\,,$$

$$12n^2+28n-9n-21\geqslant12n^2-8n+15n-10\,,$$

$$12n^2+19n-21\geqslant12n^2+7n-10\,,$$

$$12n\geqslant11\,,$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

298. Funkcja $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=\int_1^x(\log_2 t-3)^{2017}\,dt\,.$$

Wyznaczyć punkt, w którym f osiąga najmniejszą wartość.

Rozwiązanie:

Ponieważ $f'(x)=(\log_2 x-3)^{2017}$, mamy $f'(x)<0$ dla $x\in(1,8)$ oraz $f'(x)>0$ dla $x>8$. Stąd wniosek, że funkcja f jest malejąca w przedziale $(1,8)$ i rosnąca w przedziale $(8,+\infty)$, a zatem osiąga najmniejszą wartość w punkcie 8.

Odpowiedź: Dana w zadaniu funkcja osiąga najmniejszą wartość w punkcie 8.

299. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^5 \frac{dx}{x^2-4x+5},$$

a następnie doprowadzić wynik do postaci $w\pi$, gdzie w jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Wykonując podstawienie $t=x-2$ i formalnie $dx=dt$ otrzymujemy

$$\int_0^5 \frac{dx}{x^2-4x+5}=\int_0^5 \frac{dx}{(x-2)^2+1}=\int_{-2}^3 \frac{dt}{t^2+1}=\operatorname{arctg} t\Big|_{t=-2}^{3}=\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}(-2)=$$

$$=\operatorname{arctg}3+\operatorname{arctg}2=\arg(1+3i)+\arg(1+2i)=\arg\big((1+3i)(1+2i)\big)=\arg(-5+5i)=\frac{3\pi}{4}.$$

Należy zauważyć, że ze względu na niejednoznaczność argumentu mogliśmy popełnić błąd będący wielokrotnością 2π. Jednak ze względu na oszacowania

$$\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}2<\frac{\pi}{2}$$

oraz

$$\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}3<\frac{\pi}{2}$$

otrzymujemy

$$\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3<\pi,$$

co pokazuje, że otrzymany wynik jest poprawny (dodanie lub odjęcie 2π wyprowadziłoby go poza otrzymane powyżej oszacowania).

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $3\pi/4$.

300. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\,dx.$$

podając wynik w postaci liczby całkowitej.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt[3]{x+1}, \qquad x=t^3-1$$

i formalnie

$$dx=3t^2\,dt.$$

Ponadto $x=0$ odpowiada $t=1$, a $x=7$ odpowiada $t=2$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[0,\,7]$ odpowiada przedziałowi $t\in[1,\,2]$.

Otrzymujemy

$$\int\limits_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\,dx=\int\limits_1^2 \frac{4\cdot(t^3-1)}{t^2}\,3t^2dt=12\cdot\int\limits_1^2 t^3-1\,dt=12\cdot\left(\frac{t^4}{4}-t\,\Bigg|_{t=1}^{2}\right)=$$

$$=12\cdot\left(\frac{16-1}{4}-(2-1)\right)=12\cdot\left(\frac{15}{4}-\frac{4}{4}\right)=12\cdot\frac{11}{4}=33\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 33.

301. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int\limits_1^6 \frac{dx}{x^3+3x^2+2x}\,.$$

Zapisać wynik w postaci $\ln w$, gdzie w jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x^3+3x^2+2x}=\frac{1}{x\cdot(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}\,,$$

$$1=A\cdot(x+1)\cdot(x+2)+B\cdot x\cdot(x+2)+C\cdot x\cdot(x+1)\,. \qquad (\heartsuit)$$

W tym miejscu można wymnożyć iloczyny po prawej stronie równości ($\heartsuit$), a następnie porównując współczynniki występujące po obu jej stronach uzyskać układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B, C.

My jednak wybierzemy inną drogę, a mianowicie podstawimy w równości ($\heartsuit$) kolejno $x=0$, $x=-1$, $x=-2$ otrzymując odpowiednio

$$1=2A, \quad \text{skąd} \quad A=\frac{1}{2}\,,$$
$$1=-B, \quad \text{skąd} \quad B=-1\,,$$
$$1=2C, \quad \text{skąd} \quad C=\frac{1}{2}\,.$$

Wobec tego

$$\int\limits_1^6 \frac{dx}{x^3+3x^2+2x}=\int\limits_1^6 \frac{1/2}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1/2}{x+2}\,dx=\frac{\ln|x|}{2}-\ln|x+1|+\frac{\ln|x+2|}{2}\Bigg|_{x=1}^{6}=$$

$$=\frac{\ln6}{2}-\ln7+\frac{\ln8}{2}-\frac{\ln1}{2}+\ln2-\frac{\ln3}{2}=\frac{\ln2}{2}+\frac{\ln3}{2}-\ln7+\frac{3\cdot\ln2}{2}-0+\ln2-\frac{\ln3}{2}=$$

$$=3\cdot\ln2-\ln7=\ln8-\ln7=\ln\frac{8}{7}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $\ln\frac{8}{7}$.

302. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+50}\,.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy daną całkę i wykonujemy kolejno podstawienia $y=x+1$ oraz $t=y/7$:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+50}=\int \frac{dx}{(x+1)^2+49}=\int \frac{dy}{y^2+49}=\int \frac{dy}{49(y/7)^2+49}=\int \frac{7\,dt}{49t^2+49}=$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{\mathrm{arctg}t}{7}+C=\frac{\mathrm{arctg}(y/7)}{7}+C=\frac{\mathrm{arctg}((x+1)/7)}{7}+C\,.$$

303. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx\,.$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Sposób I: (rzemieślniczy)

Wykonujemy całkowanie przez części:

$$\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx = x\cdot\sin x\Big|_{x=0}^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=0-0-\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=0\,,$$

gdyż całka z sinusa po pełnym okresie jest równa 0.

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 0.

Sposób II: (pomysłowy)

Wykonując podstawienie $x=t+\pi$, czyli $t=x-\pi$, otrzymujemy:

$$\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)\cos(t+\pi)\,dt=-\int_{-\pi}^{\pi}(t+\pi)\cos t\,dt=-\int_{-\pi}^{\pi}t\cos t\,dt-\pi\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\,dt\,.$$

Dla zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że całka $\int_{-\pi}^{\pi} t\cos t\,dt$ jest równa 0 jako całka z funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym względem zera, a całka $\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\,dt$ jest równa 0 jako całka z cosinusa po pełnym okresie.

304. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x}\,.$$

lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

Rozwiązanie:

Rozkładając funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych otrzymujemy:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x} = \int_1^\infty \frac{dx}{x\cdot(x+1)} = \int_1^\infty \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x| - \ln|x+1|\Big|_{x=1}^{\infty} = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_{x=1}^{\infty} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \ln\frac{1}{2} = \ln\left|\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}\right| + \ln 2 = \ln|1| + \ln 2 = \ln 2\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa jest zbieżna i ma wartość $\ln 2$.

305. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{\sqrt{3}}^\infty \frac{2x+1}{x^4+x^2}\,dx\,.$$

Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{2x+1}{x^4+x^2} = \frac{1}{(x^2+1)\cdot x^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2}\,,$$

$$2x+1 = (Ax+B)\cdot x^2 + C\cdot x\cdot\left(x^2+1\right) + D\cdot\left(x^2+1\right)\,,$$

$$2x+1 = Ax^3+Bx^2+Cx^3+Cx+Dx^2+D\,,$$

$$\begin{cases} 0 = A+C \\ 0 = B+D \\ 2 = C \\ 1 = D \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy $A=-2$ i $B=-1$.

Wobec tego

$$\int_{\sqrt{3}}^\infty \frac{2x+1}{x^4+x^2}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^\infty -\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\,dx = -\ln\left(x^2+1\right) - \operatorname{arctg}x + 2\ln|x| - \frac{1}{x}\Big|_{x=\sqrt{3}}^{\infty} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}(-\operatorname{arctg}x) + \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right) + \ln 4 + \operatorname{arctg}\sqrt{3} - 2\ln\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + 0 + \ln 1 + \frac{\pi}{3} + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} + \ln\left(\frac{4}{3}\right)\,.$$

Odpowiedź: Dana w zadaniu całka jest zbieżna i ma wartość $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} + \ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

306. W każdym z zadań **306.1-306.20** podaj sumę szeregu (może być liczbą rzeczywistą albo jednym z symboli $+\infty$ i $-\infty$).

Niech $a_n = \frac{6}{n}$. Wówczas:

306.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \boldsymbol{+\infty}$

306.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{a_n} = \boldsymbol{+\infty}$

306.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \mathbf{6}$

306.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2}) = \mathbf{9}$

306.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+3}) = \mathbf{11}$

306.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n+2}) = \mathbf{3}$

306.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n+3}) = \mathbf{5}$

306.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+2} - a_{n+3}) = \mathbf{2}$

306.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+1}^2\right) = \mathbf{36}$

306.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+2}^2\right) = \mathbf{45}$

306.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+3}^2\right) = \mathbf{49}$

306.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1}^2 - a_{n+2}^2\right) = \mathbf{9}$

306.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1}^2 - a_{n+3}^2\right) = \mathbf{13}$

306.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+2}^2 - a_{n+3}^2\right) = \mathbf{4}$

306.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) = \mathbf{63}$

306.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+2}}\right) = \mathbf{70}$

306.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+3}}\right) = \mathbf{73}$

306.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+2}}\right) = \mathbf{7}$

306.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+3}}\right) = \mathbf{10}$

306.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+2}} - 2^{a_{n+3}}\right) = \mathbf{3}$

---

307. W każdym z zadań **307.1-307.14** podaj sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Niech $a_n=\frac{n^2}{2^n}$. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=6\,.$$

Wobec tego:

307.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})=\mathbf{23/2}$

307.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+2})=\mathbf{21/2}$

307.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=\mathbf{1/2}$

307.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+2})=\mathbf{3/2}$

307.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+1}^2\right)=\mathbf{1/4}$

307.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+2}^2\right)=\mathbf{5/4}$

307.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(4^{a_n}-4^{a_{n+1}}\right)=\mathbf{1}$

307.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(4^{a_n}-4^{a_{n+2}}\right)=\mathbf{4}$

307.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(9^{a_n}-9^{a_{n+1}}\right)=\mathbf{2}$

307.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(9^{a_n}-9^{a_{n+2}}\right)=\mathbf{10}$

307.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(16^{a_n}-16^{a_{n+1}}\right)=\mathbf{3}$

307.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(16^{a_n}-16^{a_{n+2}}\right)=\mathbf{18}$

307.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+48a_n}-\sqrt{1+48a_{n+1}}\right)=\mathbf{4}$

307.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+48a_n}-\sqrt{1+48a_{n+2}}\right)=\mathbf{10}$