Zadania do omówienia na ćwiczeniach[1] we wtorki/środy 7/8 i 21/22.06.2022 oraz na konwersatorium w środę/czwartek 22/23.06.2022.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami.

Nie wszystkie zadania zostaną szczegółowo przeliczone.

Proszę umieć wskazać zadania sprawiające najwięcej kłopotu.

Część zajęć może zostać przeznaczona na konsultacje przedegzaminacyjne.

Na ćwiczeniach we wtorek[2] 14.06.2022 będziemy omawiać zadania 308–312, które są na Moodlu.

263. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{\pi} \sin^{2020} x - \cos^{2020} x \, dx \, .$$

264. Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_0^{\infty} \frac{x^5-1}{x^7+1} \, dx \, .$$

Wskazówka: Wykonać podstawienie $x=1/t$ albo $x=e^t$.

265. Obliczyć wartość całki

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \, dx \, .$$

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $x=1/t$, czyli $t=1/x$ i formalnie $dx=\frac{-dt}{t^2}$. Otrzymujemy (w międzyczasie całkując przez części):

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \, dx = -\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^3} \, dt = -\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^3} \cdot \operatorname{arctg} t \, dt =$$

$$= \frac{1}{2t^2} \cdot \operatorname{arctg} t \Bigg|_{t=-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{t^2+1} \, dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2} \cdot \frac{-\pi}{6} - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2+1} \, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t} - \operatorname{arctg} t \Bigg|_{t=-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \, .$$

Dlaczego powyższe rozwiązanie jest błędne ???
Podaj poprawne rozwiązanie.

[1] W ramach czasu pozostałego po kolokwium 4 oraz ewentualnych kolokwiach dodatkowych na ćwiczeniach we wtorek/środę 21/22.06.2022.

[2] Studenci z grupy 4 mogą dołączyć do dowolnej z grup 1–3.

266. Funkcje $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są określone wzorami
$$f(x)=e^{x^9} \qquad \text{oraz} \qquad g(x)=e^{x^7}\,.$$
Podaj wartość ilorazu pochodnych
$$\frac{f^{(63)}(0)}{g^{(63)}(0)}\,.$$

267. Funkcje $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są określone wzorami
$$f(x)=e^{x^{12}} \qquad \text{oraz} \qquad g(x)=e^{x^{10}}\,.$$
Podaj wartość ilorazu pochodnych
$$\frac{f^{(60)}(0)}{g^{(60)}(0)}\,.$$

268. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$f(x)=e^{x^2}\,.$$
Podaj wartość $f^{(30)}(0)$.

269. Funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem
$$f(x)=e^{x^3}\,.$$
Podaj wartość $f^{(30)}(0)$.

270. Podaj wartość granicy
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{99n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}\,.$$

271. Podaj wartość granicy
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{30n}\frac{1}{\sqrt{n^2+4kn}}\,.$$

272. Podaj wartość granicy
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{9n}\frac{n}{k^2}\,.$$

273. Podaj wartość granicy
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{11n}\frac{n^2}{k^3}\,.$$

274. Dla podanej liczby b podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich takich liczb rzeczywistych a, że potęgowy szereg zespolony
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n}}{\sqrt{n}}$$

jest zbieżny dla $z=a+bi$.
Uwaga: Istotną częścią zadania jest określenie przynależności do przedziału jego końców.

a) $b=0$, $a\in$ .... **b)** $b=\dfrac{2\cdot\sqrt{2}}{3}$, $a\in$ ....

c) $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $a\in$ .... **d)** $b=\dfrac{1}{2}$, $a\in$ ....

275. Wiadomo, że dla funkcji różniczkowalnej $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, gdzie $0\leqslant a<b$, pole powierzchni powstałej przez obrót krzywej

$$\{(x,f(x)):\ x\in[a,b]\}$$

wokół osi OY (krzywa jest w płaszczyźnie XY) jest równe

$$2\pi\cdot\int_a^b x\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,.$$

Wyznaczyć pole powierzchni (fragmentu paraboloidy obrotowej)

$$\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2=z\leqslant 7\right\}.$$

Wskazówka: Dana w zadaniu powierzchnia obrotowa powstaje przez obrót wokół osi OZ łuku paraboli o równaniu $z=x^2$, $0\leqslant x\leqslant ???$, umieszczonego w płaszczyźnie XZ.

276. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^3 15x\cdot\sqrt{x+1}\,dx$ podając wynik w postaci liczby całkowitej.

277. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^1 \dfrac{x\,dx}{x^2-2x+2}$. Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

278. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int \dfrac{dx}{x^3-x^2}$.

279. Obliczyć wartość granicy (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+8}+\frac{9}{n^3+27}+\ldots+\frac{k^2}{n^3+k^3}+\ldots+\frac{4n^2}{n^3+8n^3}\right).$$

280. Obliczyć wartość całki oznaczonej $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x^3\cdot\operatorname{arctg}x\,dx$. Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\pi$, gdzie w liczbą wymierną.

281. Udowodnić zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^{2017}n^{2016}}{n^{2/3}+n^{3/2}}$.

282. Obliczyć całkę nieoznaczoną $\int e^{2x}\cdot\sin 3x\,dx$.

283. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{8^n+n^{11}}}{\sqrt{4^n+n^{9999}}}\,.$$

284. Funkcja różniczkowalna $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma pochodną daną wzorem $f'(x)=|x|$. Ponadto wiadomo, że $f(-1)=-1$. Wyznaczyć $f(1)$.

285. Obliczyć całkę oznaczoną $\displaystyle\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

286. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty} n^p \cdot \sum_{k=1}^{55n} \sqrt{\sqrt{n}+\sqrt{9n+k}}$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

287. Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1}\,dx\,.$$

288. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^e x^2 \cdot \ln x\,dx\,.$$

289. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}\,.$$

290. Funkcja ciągła $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x)=2 \qquad \text{dla} \qquad x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}\,.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x)=x$ dla $x\in\{0,\,2,\,4\}$. Wyznaczyć $f(5)$.

291. Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_1^9 \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}\,dx\,.$$

Pamiętaj o uproszczeniu wyniku.

292. Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty} n^p \cdot \left(\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n+2}+\sqrt[3]{n+3}+\sqrt[3]{n+4}+\ldots+\sqrt[3]{8n-2}+\sqrt[3]{8n-1}+\sqrt[3]{8n}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

293. W każdym z zadań **293.1-293.5** podaj w postaci uproszczonej normę supremum funkcji f określonej podanym wzorem w podanej dziedzinie.

Przypomnienie: $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in D_f\}$.

293.1. $f(x)=x^2-5$, $D_f=(-1,3)$, $\|f\|=$ ....

293.2. $f(x)=x^3-15$, $D_f=(-1,3)$, $\|f\|=$ ....

293.3. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+5}$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=$ ....

293.4. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=$ ....

293.5. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+5x+7}$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=$ ....

---

294. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^3 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2-4x+4}}\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci niezawierającej „arctg".

295. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+4}\,.$$

Wskazówka: $n^4+4=(n^2-2n+2)\cdot(n^2+2n+2)$.

296. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\frac{1}{49}-\frac{1}{64}+\frac{1}{81}-\frac{1}{100}+\frac{1}{121}-\frac{1}{144}+\frac{1}{169}-\ldots$$

Wolno skorzystać bez dowodu z równości

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

297. Udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot(4n-3)\cdot(4n+1)}{(3n-2)\cdot(3n+1)\cdot(3n+4)}\,.$$

298. Funkcja $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=\int_1^x (\log_2 t-3)^{2017}\,dt\,.$$

Wyznaczyć punkt, w którym f osiąga najmniejszą wartość.

299. Obliczyć wartość całki oznaczonej
$$\int_0^5 \frac{dx}{x^2-4x+5},$$
a następnie doprowadzić wynik do postaci $w\pi$, gdzie w jest liczbą wymierną.

300. Obliczyć wartość całki oznaczonej
$$\int_0^7 \frac{4x}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\,dx\,.$$
podając wynik w postaci liczby całkowitej.

301. Obliczyć wartość całki oznaczonej
$$\int_1^6 \frac{dx}{x^3+3x^2+2x}\,.$$
Zapisać wynik w postaci $\ln w$, gdzie w jest liczbą wymierną.

302. Obliczyć całkę nieoznaczoną
$$\int \frac{dx}{x^2+2x+50}\,.$$

303. Obliczyć wartość całki oznaczonej
$$\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx\,.$$
Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

304. Obliczyć wartość całki niewłaściwej
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}\,.$$
lub wykazać, że całka ta jest rozbieżna.

305. Obliczyć wartość całki niewłaściwej
$$\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{2x+1}{x^4+x^2}\,dx\,.$$
Pamiętać o uproszczeniu wyniku.

306. W każdym z zadań **306.1-306.20** podaj sumę szeregu (może być liczbą rzeczywistą albo jednym z symboli $+\infty$ i $-\infty$).

Niech $a_n = \frac{6}{n}$. Wówczas:

306.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$

306.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{a_n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

306.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \ldots\ldots$

306.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2}) = \ldots\ldots$

306.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+3}) = \ldots\ldots$

306.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n+2}) = \ldots\ldots$

306.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_{n+3}) = \ldots\ldots$

306.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_{n+2} - a_{n+3}) = \ldots\ldots$

306.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+1}^2\right) = \ldots\ldots$

306.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+2}^2\right) = \ldots\ldots$

306.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+3}^2\right) = \ldots$

306.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1}^2 - a_{n+2}^2\right) = \ldots$

306.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+1}^2 - a_{n+3}^2\right) = \ldots$

306.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_{n+2}^2 - a_{n+3}^2\right) = \ldots$

306.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+1}}\right) = \ldots$

306.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+2}}\right) = \ldots$

306.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_n} - 2^{a_{n+3}}\right) = \ldots$

306.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+2}}\right) = \ldots$

306.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+1}} - 2^{a_{n+3}}\right) = \ldots$

306.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{a_{n+2}} - 2^{a_{n+3}}\right) = \ldots$

307. W każdym z zadań **307.1-307.14** podaj sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Niech $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6\,.$$

Wobec tego:

307.1.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) =$ ....
307.2.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+2}) =$ ....
307.3.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) =$ ....
307.4.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+2}) =$ ....
307.5.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+1}^2\right) =$ ....
307.6.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 - a_{n+2}^2\right) =$ ....
307.7.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(4^{a_n} - 4^{a_{n+1}}\right) =$ ....
307.8.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(4^{a_n} - 4^{a_{n+2}}\right) =$ ....
307.9.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(9^{a_n} - 9^{a_{n+1}}\right) =$ ....
307.10.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(9^{a_n} - 9^{a_{n+2}}\right) =$ ....
307.11.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(16^{a_n} - 16^{a_{n+1}}\right) =$ ....
307.12.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(16^{a_n} - 16^{a_{n+2}}\right) =$ ....
307.13.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+48a_n} - \sqrt{1+48a_{n+1}}\right) =$ ....
307.14.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+48a_n} - \sqrt{1+48a_{n+2}}\right) =$ ....