261. Korzystając ze wzorów

$$-\ln(1-z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \qquad |z|\leqslant 1,\ z\neq 1$$

oraz

$$\ln z=\ln|z|+i\cdot\arg z \qquad \arg z\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}\,.$$

Skonfrontować wynik z zadaniem **205** z listy **10**.

Wskazówka: Dodać szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

dla $z\in\left\{-1,\ \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right\}$, przemnożone przez odpowiednie współczynniki.

Odpowiedź: $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}+\frac{\ln 2}{3}$.

262. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{3^n}$$

sprowadzając wynik do postaci

$$\frac{a+b\cos x}{c+d\cos x}\,,$$

gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy

$$z=\cos x+i\sin x\,.$$

Wówczas dla dowolnej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$z^n=\cos nx+i\sin nx$$

i w konsekwencji

$$\cos nx=\operatorname{Re} z^n\,.$$

Przekształcamy dany w zadaniu szereg, korzystając po drodze ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{Re} z^n}{3^n}=\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}=\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n=\operatorname{Re}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=\operatorname{Re}\frac{3}{3-z}=$$

$$=\operatorname{Re}\frac{3}{3-\cos x-i\sin x}=\operatorname{Re}\frac{3\cdot(3-\cos x+i\sin x)}{(3-\cos x)^2+\sin^2 x}=\frac{3\cdot(3-\cos x)}{9-6\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}=$$

$$=\frac{9-3\cos x}{10-6\cos x}\,.$$

Odpowiedź: Suma szeregu danego w treści zadania jest równa $\frac{9-3\cos x}{10-6\cos x}$.