

246. Obliczyć współczynniki szeregu Fouriera funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ okresowej o okresie 2π określonej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{dla } x \in (\pi/2, 2\pi) \end{cases}$$

Doprowadzić wzory na współczynniki szeregu Fouriera do postaci niezawierającej funkcji trygonometrycznych (czyli w ostatecznej postaci nie powinny występować w tych wzorach wyrażenia typu $\sin n\pi$ czy $\cos n\pi$).

Rozwiązanie:

Stosując wzory na współczynniki szeregu Fouriera otrzymujemy:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos nx \, dx = \frac{\sin nx}{n\pi} \Big|_{x=0}^{\pi/2} = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin nx \, dx = -\frac{\cos nx}{n\pi} \Big|_{x=0}^{\pi/2} = \frac{1 - \cos(n\pi/2)}{n\pi} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{1 - (-1)^{n/2}}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{2} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod{2} \\ 0 & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 2 \pmod{4} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{n\pi} & \text{dla } n \equiv 1 \pmod{2} \\ 0 & \text{dla } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{1}{(n/2)\pi} & \text{dla } n \equiv 2 \pmod{4} \end{cases} \end{aligned}$$

247. Niech

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n}.$$

Zakładając pełną beztróskę w manipulowaniu szeregami funkcyjnymi, obliczyć wartość całki $\int_0^{2\pi} f(x)g(x) \, dx$.

Rozwiązanie:

Korzystamy z tego, że sinusy o różnych częstotliwościach są prostopadłe, czyli całka z ich iloczynu jest zerem:

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{dla } m = n \\ 0 & \text{dla } m \neq n \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) \, dx &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{3^m} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \frac{\sin mx}{3^m} \, dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{2^n} \cdot \frac{\sin nx}{3^n} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 nx}{6^n} \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{6^n} = \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

Uwaga: Idea powyższych rachunków jest następująca: iloczyn skalarny dwóch wektorów jest sumą iloczynów odpowiednich współrzędnych – tutaj rolę współrzędnych spełniają współczynniki szeregu trygonometrycznego (z dokładnością do stałego czynnika).

W rozwiązaniu można też powołać się bezpośrednio na postać iloczynu skalarnego w bazie ortogonalnej sinusów i cosinusów.

248. Obliczyć wartość sumy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$. Wolno skorzystać z gotowych wartości całek:

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \, dx = \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{2x\sqrt{2}} \, dx = \frac{e^{4\pi\sqrt{2}} - 1}{2\sqrt{2}},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \cos nx \, dx = \left(e^{2\pi\sqrt{2}} - 1 \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{n^2+2},$$

$$\int_0^{2\pi} e^{x\sqrt{2}} \sin nx \, dx = \left(e^{2\pi\sqrt{2}} - 1 \right) \cdot \frac{-n}{n^2+2}.$$

W miarę możliwości rozwiązać zadanie dwoma sposobami i porównać wyniki. Dla czytelności przeprowadzanych rachunków oraz podanej odpowiedzi można użyć oznaczeń:

$$A = e^{2\pi\sqrt{2}} - 1 \quad \text{oraz} \quad B = e^{2\pi\sqrt{2}} + 1.$$

Wskazówka: Wykorzystać szereg Fouriera funkcji $f(x) = e^{x\sqrt{2}}$ dla $x \in (0, 2\pi)$. Powołać się na zbieżność tego szeregu w wybranym punkcie lub wykorzystać równość Parsewala.

Rozwiązanie:

Na wstępie zauważmy, że na mocy podanych równości szereg Fouriera funkcji f okresowej z okresem 2π i określonej na przedziale $[0, 2\pi)$ wzorem

$$f(x) = \begin{cases} e^{x\sqrt{2}} & \text{dla } x \in (0, 2\pi) \\ \frac{e^{2\pi\sqrt{2}}+1}{2} & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

ma współczynniki

$$a_0 = \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{2\pi\sqrt{2}},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{n^2 + 2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{-n}{n^2 + 2},$$

a ponadto jest on punktowo zbieżny do funkcji f , gdyż f ma w punkcie nieciągłości wartość równą średniej arytmetycznej granic jednostronnych.

Sposób I

Porównując wartość funkcji f w punkcie $x=0$ z sumą jej szeregu Fouriera w tym punkcie otrzymujemy

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

czyli

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{2} = \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{2\pi\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}.$$

Stąd otrzymujemy kolejno:

$$\frac{e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{2} - \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{2\pi\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2},$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}} + \pi\sqrt{2} - e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{2\pi\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2},$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}} + \pi\sqrt{2} - e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{4 \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2},$$

$$\frac{\pi\sqrt{2}B - A}{4A} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}.$$

Sposób II

Korzystając z równości Parsewala:

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

otrzymujemy

$$\frac{e^{4\pi\sqrt{2}} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{(e^{2\pi\sqrt{2}} - 1)^2}{4\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left((e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{n^2 + 2} \right)^2 + \left((e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \frac{-n}{n^2 + 2} \right)^2 \right),$$

co przepisujemy kolejno jako:

$$\frac{(e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} + 1)}{2\sqrt{2}} = \frac{(e^{2\pi\sqrt{2}} - 1)^2}{4\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2},$$

$$\begin{aligned} \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{2\sqrt{2}} &= \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{4\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}, \\ \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{2\sqrt{2}} - \frac{e^{2\pi\sqrt{2}} - 1}{4\pi} &= \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}, \\ \frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}} + \pi\sqrt{2} - e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{4\pi} &= \frac{1}{\pi} \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}, \\ \frac{\pi\sqrt{2}e^{2\pi\sqrt{2}} + \pi\sqrt{2} - e^{2\pi\sqrt{2}} + 1}{4 \cdot (e^{2\pi\sqrt{2}} - 1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}, \\ \frac{\pi\sqrt{2}B - A}{4A} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2}. \end{aligned}$$

249. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

Obliczyć wartość sumy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \dots$$

Wskazówka: Scalkować podany w zadaniu szereg trygonometryczny i wstawić $x = \pi/2$.

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f będącą sumą szeregu funkcyjnego

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad (1)$$

gdzie $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^3}$, a więc $f'_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$. Ponieważ szeregi liczbowe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f'_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

są zbieżne, szeregi funkcyjne $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ są zbieżne jednostajnie i w konsekwencji szereg (1) można różniczkować wyraz za wyrazem. Zatem dla $x \in [0, 2\pi]$ mamy

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6},$$

skąd

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} \right) dx = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi^2 x}{6} + C.$$

Zauważmy, że ze wzoru (1) wynika $f(0) = 0$, skąd $C = 0$ i w konsekwencji

$$f(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi^2 x}{6} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \quad (2)$$

Przyjmując $x = \pi/2$ we wzorze (2) otrzymujemy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{96} - \frac{\pi^3}{16} + \frac{\pi^3}{12} = \pi^3 \cdot \frac{1-6+8}{96} = \pi^3 \cdot \frac{3}{96} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Odpowiedź: Suma szeregu liczbowego podanego w treści zadania jest równa $\pi^3/32$.

250. W każdym z zadań **250.1-250.10** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{4^n}, & B(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{5^n}, \\ C(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{10^n}, & D(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{10^n}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{250.1.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \frac{\pi}{15}$$

$$\mathbf{250.2.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \frac{\pi}{24}$$

$$\mathbf{250.3.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \frac{\pi}{99}$$

$$\mathbf{250.4.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \frac{\pi}{99}$$

$$\mathbf{250.5.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \frac{\pi}{19}$$

$$\mathbf{250.6.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \frac{\pi}{39}$$

$$\mathbf{250.7.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \frac{\pi}{159}$$

$$\mathbf{250.8.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = \frac{\pi}{49}$$

$$\mathbf{250.9.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \frac{\pi}{249}$$

$$\mathbf{250.10.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \frac{\pi}{999}$$

251. W każdym z zadań **251.1-251.21** podaj w postaci uproszczonej wartość całki (jako liczbę wymierną lub jako iloczyn liczby wymiernej i liczby π).

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, \quad B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{3^n}, \quad C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{3^n},$$

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3nx}{10^n}, \quad E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+1)x}{10^n}, \quad F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(3n+2)x}{10^n}.$$

$$\mathbf{251.1.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)^2 dx = \frac{\pi}{3}$$

$$\mathbf{251.2.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)^2 dx = \frac{\pi}{8}$$

$$\mathbf{251.3.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)^2 dx = \frac{\pi}{8}$$

$$\mathbf{251.4.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)^2 dx = \frac{\pi}{99}$$

$$\mathbf{251.5.} \quad \int_0^{2\pi} E(x)^2 dx = \frac{\pi}{99}$$

$$\mathbf{251.6.} \quad \int_0^{2\pi} F(x)^2 dx = \frac{\pi}{99}$$

$$\mathbf{251.7.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)B(x) dx = \frac{\pi}{11}$$

$$\mathbf{251.8.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)C(x) dx = \frac{\pi}{22}$$

$$\mathbf{251.9.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)D(x) dx = \frac{\pi}{79}$$

$$\mathbf{251.10.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)E(x) dx = \frac{\pi}{158}$$

$$\mathbf{251.11.} \quad \int_0^{2\pi} A(x)F(x) dx = \frac{\pi}{316}$$

$$\mathbf{251.12.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)C(x) dx = 0$$

$$\mathbf{251.13.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)D(x) dx = \frac{\pi}{2699}$$

$$\mathbf{251.14.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)E(x) dx = \frac{30\pi}{2699}$$

$$\mathbf{251.15.} \quad \int_0^{2\pi} B(x)F(x) dx = \frac{\pi}{8097}$$

$$\mathbf{251.16.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)D(x) dx = \frac{90\pi}{2699}$$

$$\mathbf{251.17.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)E(x) dx = \frac{\pi}{2699}$$

$$\mathbf{251.18.} \quad \int_0^{2\pi} C(x)F(x) dx = \frac{30\pi}{2699}$$

$$\mathbf{251.19.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)E(x) dx = 0$$

$$\mathbf{251.20.} \quad \int_0^{2\pi} D(x)F(x) dx = 0$$

$$\mathbf{251.21.} \quad \int_0^{2\pi} E(x)F(x) dx = 0$$

252. W każdym z zadań **252.1-252.16** podaj w postaci uproszczonej wartość całki oznaczonej.

Wskazówka: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{p^n} = \frac{p \cdot \sin x}{p^2 + 1 - 2p \cdot \cos x}$ dla $p > 1$.

$$252.1. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{5 - 4 \cos x} = \frac{\pi}{4}$$

$$252.2. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{5 - 3 \cos x} = \frac{2\pi}{9}$$

$$252.3. \int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \, dx}{5 - 4 \cos x} = \frac{\pi}{8}$$

$$252.4. \int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 2x \, dx}{5 - 3 \cos x} = \frac{2\pi}{27}$$

$$252.5. \int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 3x \, dx}{5 - 4 \cos x} = \frac{\pi}{16}$$

$$252.6. \int_0^{2\pi} \frac{\sin x \cdot \sin 3x \, dx}{5 - 3 \cos x} = \frac{2\pi}{81}$$

$$252.7. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{13 - 5 \cos x} = \frac{2\pi}{25}$$

$$252.8. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{17 - 8 \cos x} = \frac{\pi}{16}$$

$$252.9. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 4 \cos x)^2} = \frac{\pi}{12}$$

$$252.10. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 3 \cos x)^2} = \frac{\pi}{18}$$

$$252.11. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(13 - 5 \cos x)^2} = \frac{\pi}{150}$$

$$252.12. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(17 - 8 \cos x)^2} = \frac{\pi}{240}$$

$$252.13. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 4 \cos x) \cdot (5 - 3 \cos x)} = \frac{\pi}{15}$$

$$252.14. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(13 - 5 \cos x) \cdot (17 - 8 \cos x)} = \frac{\pi}{190}$$

$$252.15. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 4 \cos x) \cdot (13 - 5 \cos x)} = \frac{\pi}{45}$$

$$252.16. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{(5 - 3 \cos x) \cdot (13 - 5 \cos x)} = \frac{2\pi}{105}$$