239. W każdym z zadań **239.1-239.15** podaj normę supremum funkcji f o podanym wzorze i dziedzinie.

239.1. $f(x)=7\sin x$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=\mathbf{7}$

239.2. $f(x)=7\sin x-3$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=\mathbf{10}$

239.3. $f(x)=7\sin^2 x-3$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=\mathbf{4}$

239.4. $f(x)=7\sin^3 x-3$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=\mathbf{10}$

239.5. $f(x)=\log_2 x-2$, $D_f=\left(\frac{1}{8},\,8\right)$, $\|f\|=\mathbf{5}$

239.6. $f(x)=\log_2 x-2$, $D_f=(2,\,32)$, $\|f\|=\mathbf{3}$

239.7. $f(x)=(\log_2 x)^2-6$, $D_f=\left(\frac{1}{8},\,4\right)$, $\|f\|=\mathbf{6}$

239.8. $f(x)=(\log_2 x)^3-6$, $D_f=\left(\frac{1}{8},\,4\right)$, $\|f\|=\mathbf{33}$

239.9. $f(x)=(\log_2 x)^4-6$, $D_f=\left(\frac{1}{8},\,4\right)$, $\|f\|=\mathbf{75}$

239.10. $f(x)=\sqrt{x^2+3x}-x$, $D_f=(1,\,+\infty)$, $\|f\|=\mathbf{3/2}$

239.11. $f(x)=\sqrt{x^2+8x}-x$, $D_f=(1,\,+\infty)$, $\|f\|=\mathbf{4}$

239.12. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+7x^2}-x$, $D_f=(1,\,+\infty)$, $\|f\|=\mathbf{7/3}$

239.13. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+26x^2}-x$, $D_f=(1,\,+\infty)$, $\|f\|=\mathbf{26/3}$

239.14. $f(x)=\sqrt[4]{x^4+15x^3}-x$, $D_f=(1,\,+\infty)$, $\|f\|=\mathbf{15/4}$

239.15. $f(x)=\sqrt[4]{x^4+80x^3}-x$, $D_f=(1,\,+\infty)$, $\|f\|=\mathbf{20}$

---

240. Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$f(x)=\frac{6x^6-x^2+7}{8x^8-x^4+11}\,.$$

Wskazówka: Oszacuj podane wyrażenie osobno w przypadkach $|x|<1$ i $|x|\geqslant 1$

Rozwiązanie:

Oszacujemy wyrażenie definiujące funkcję f rozważając dwa przypadki:

1° Gdy $|x|<1$, otrzymujemy:

$$\frac{6x^6-x^2+7}{8x^8-x^4+11}\leqslant\frac{6-0+7}{0-1+11}=\frac{13}{10}\,.$$

2° Gdy $|x|\geqslant 1$, otrzymujemy:

$$\frac{6x^6-x^2+7}{8x^8-x^4+11}\leqslant\frac{6x^6-0+7x^6}{8x^8-x^8+0}=\frac{13}{7x^2}\leqslant\frac{13}{7}\,.$$

Wobec tego dla każdej liczby rzeczywistej x mamy

$$|f(x)|=f(x)\leqslant\frac{13}{7}\,,$$

skąd wynika nierówność $\|f\|\leqslant 13/7$.

241. Dany jest szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F, gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x)=\frac{\sin 2^n x}{333^n}\,.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m, dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m-krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k\leqslant m$ zachodzi równość $F^{(k)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że $m=8$.

Dla liczb całkowitych nieujemnych $k\leqslant 8$ otrzymujemy

$$f_n^{(k)}(x)=\frac{2^{kn}\cdot\text{jakiśsinus}\,2^n x}{333^n}\,,$$

gdzie $f^{(0)}=f$, a "jakiśsinus" oznacza jedną z funkcji $\pm\sin$, $\pm\cos$. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|f_n^{(k)}\right\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{kn}}{333^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^k}{333}\right)^n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{256}{333}\right)^n<+\infty\,,$$

skąd wynika jednostajna zbieżność szeregów funkcyjnych $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$, a w konsekwencji możliwość 8-krotnego różniczkowania danego w zadaniu szeregu funkcyjnego wyraz za wyrazem.

Ponadto

$$f_n^{(9)}(x)=\frac{2^{9n}\cos 2^n x}{333^n}=\left(\frac{512}{333}\right)^n\cdot\cos 2^n x\,,$$

co dla $x=0$ daje szereg rozbieżny $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{512}{333}\right)^n$. Zatem szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(9)}$ nie jest zbieżny (nawet punktowo), co dowodzi, że liczba $m=9$ nie spełnia warunków zadania.

W rozwiązaniu wykorzystaliśmy zbieżność szeregu geometrycznego o ilorazie 256/333 bezwzględnie mniejszym od 1 i rozbieżność szeregu geometrycznego o ilorazie 512/333 większym od 1.

242. Niech

$$f_n(x)=\frac{\cos\left(n^3\cdot x\right)}{n^{20}}\,.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Rozwiązanie:

Najpierw zauważmy, że

$$f_n^{(k)}(x)=\frac{n^{3k}\cdot \mathrm{jsin}\left(n^3\cdot x\right)}{n^{20}}=\frac{\mathrm{jsin}\left(n^3\cdot x\right)}{n^{20-3k}}\,,$$

gdzie *jsin* jest jedną z funkcji $\pm\sin$ lub $\pm\cos$. Zatem

$$\left\|f_n^{(k)}\right\|=\frac{1}{n^{20-3k}}=n^{3k-20}\,.$$

Jeżeli szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\|f_n^{(k)}\right\|$ jest zbieżny, to szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny.

Ponieważ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|f_n^{(k)}\right\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{20-3k}}\,,$$

szereg ten jest zbieżny, o ile $20-3k>1$, czyli dla $k\leqslant 6$.

W szczególności szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(6)}$ jest jednostajnie zbieżny.

Jeżeli $\left\|f_n^{(k)}\right\|\not\to 0$ przy $n\to\infty$, to szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ nie jest jednostajnie zbieżny. Taką sytuację mamy np. dla $k=7$, gdzie

$$\left\|f_n^{(7)}\right\|=n\to\infty\,.$$

Wobec tego szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(7)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez $k=6$.

243. Dany jest szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F, gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x)=\frac{\cos n^8x}{n^{60}}\,.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m, dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m-krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k \leqslant m$ zachodzi równość $F^{(k)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że $m=7$.

Dla liczb całkowitych nieujemnych $k \leqslant 7$ otrzymujemy

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{\text{jakiśsinus}\, n^8 x}{n^{60-8k}},$$

gdzie $f^{(0)} = f$, a "jakiśsinus" oznacza jedną z funkcji $\pm\sin$, $\pm\cos$. Zatem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| f_n^{(k)} \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{60-8k}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{60-8\cdot 7}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < +\infty,$$

skąd wynika jednostajna zbieżność szeregów funkcyjnych $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$, a w konsekwencji możliwość 7-krotnego różniczkowania danego w zadaniu szeregu funkcyjnego wyraz za wyrazem.

Ponadto

$$f_n^{(8)}(x) = n^4 \cos n^8 x,$$

co dla $x=0$ daje szereg rozbieżny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4$. Zatem szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(8)}$ nie jest zbieżny (nawet punktowo), co dowodzi, że liczba $m=8$ nie spełnia warunków zadania.

244. Niech

$$f_n(x) = \frac{\cos\left(\binom{2n}{n} \cdot x\right)}{\binom{3n}{n}^4}.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{\binom{2n}{n}^k \cdot \text{jsin}\left(\binom{2n}{n} \cdot x\right)}{\binom{3n}{n}^4},$$

gdzie *jsin* jest jedną z funkcji $\pm\sin$ lub $\pm\cos$. Stąd

$$\left\| f_n^{(k)} \right\| = \frac{\binom{2n}{n}^k}{\binom{3n}{n}^4}. \tag{1}$$

Stosując kryterium d'Alemberta do szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| f_n^{(k)} \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}^k}{\binom{3n}{n}^4} \tag{2}$$

otrzymujemy

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}^k}{\binom{3n+3}{n+1}^4}\cdot\frac{\binom{3n}{n}^4}{\binom{2n}{n}^k}=\frac{\binom{2n+2}{n+1}^k}{\binom{2n}{n}^k}\cdot\frac{\binom{3n}{n}^4}{\binom{3n+3}{n+1}^4}=$$

$$=\left(\frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{(n+1)^2}\right)^k\cdot\left(\frac{(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot(n+1)}{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}\right)^4\to\frac{4^k\cdot 4^4}{27^4}=\frac{2^{2k+8}}{3^{12}}=\left(\frac{2^{k+4}}{3^6}\right)^2=g\,.$$

Ponieważ $3^6=729$, zachodzą nierówności $2^9<3^6<2^{10}$. Zatem dla $k=5$ otrzymujemy $g<1$. Wobec tego na mocy kryterium d'Alemberta szereg liczbowy (2) jest zbieżny, a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(5)}$ jest jednostajnie zbieżny.

Odnosząc powyższe kryterium d'Alemberta do ciągu (1) otrzymujemy $g>1$ dla $k=6$, skąd wynika, że ciąg liczbowy (1) jest rozbieżny do $+\infty$. W szczególności

$$\left\|f_n^{(6)}\right\|\not\to 0\,,$$

a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(6)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione przez $k=5$.

245. Niech

$$f_n(x)=\frac{\cos(n!\cdot x)}{(3n)!}\,.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Rozwiązanie:

Niech $k=3$. Wówczas

$$f_n^{(k)}(x)=f_n'''(x)=\frac{(n!)^3\cdot\sin(n!\cdot x)}{(3n)!}\,,$$

skąd

$$\|f_n'''\|=\frac{(n!)^3}{(3n)!}\,.$$

Stosując kryterium d'Alemberta do szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n'''\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!} \tag{3}$$

otrzymujemy

$$\frac{((n+1)!)^3}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{(n!)^3}=\frac{(n+1)^3}{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}\to\frac{1}{27}<1\,.$$

Zatem szereg liczbowy (3) jest zbieżny, a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'''$ jest jednostajnie zbieżny.

Ponadto

$$f_n^{(k+1)}(x)=f_n^{(4)}(x)=\frac{(n!)^4\cdot\cos(n!\cdot x)}{(3n)!}\,,$$

skąd

$$\left\|f_n^{(4)}\right\|=\frac{(n!)^4}{(3n)!}\,. \tag{4}$$

Stosując kryterium d'Alemberta do ciągu (4) otrzymujemy

$$\frac{((n+1)!)^4}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{(n!)^4}=\frac{(n+1)^4}{(3n+1)\cdot(3n+2)\cdot(3n+3)}\to+\infty>1\,.$$

Zatem ciąg liczbowy (4) jest rozbieżny do $+\infty$, skąd w szczególności

$$\left\|f_n^{(4)}\right\|\not\to 0\,,$$

a w związku z tym szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(4)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

Inne wnioskowanie: Z kryterium d'Alemberta jak wyżej, szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(4)}(0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^4}{(3n)!}$ jest rozbieżny, więc $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n^{(4)}$ nie jest nawet punktowo zbieżny, a co dopiero jednostajnie.