Kolokwium nr 3: materiał zadań 1–245.
Grupy 1, 2, 3: wtorek 24.05.2022, godz. 12:15-13:20.
Grupa 4: środa 25.05.2022, godz. 16:15-17:20.

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek/środę 17/18.05.2022.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami.

Podsumowanie najważniejszych wiadomości o normie supremum i zbieżności jednostajnej:

Normą supremum funkcji f nazywamy liczbę

$$\|f\| = \sup_{x\in D_f} |f(x)| .$$

Definicja zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego:

Ciag funkcji (f_n) określonych na wspólnej dziedzinie nazywamy zbieżnym **jednostajnie** do funkcji f określonej na tej samej dziedzinie, co zapisujemy jako $f_n \rightrightarrows f$, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0 .$$

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji ciągłych jest zbieżny jednostajnie do funkcji f, to f jest funkcją ciągłą.

Jeżeli ciąg (f_n) funkcji mających ciągłe pochodne jest zbieżny jednostajnie do funkcji f, a ciąg pochodnych (f'_n) jest zbieżny jednostajnie do funkcji g, to funkcja f jest różniczkowalna i przy tym $f' = g$.

Szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami określonymi na wspólnej dziedzinie, nazywamy zbieżnym **jednostajnie**, jeżeli ciąg sum częściowych (S_n) określony wzorem

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k .$$

jest zbieżny jednostajnie. Tak jak w przypadku szeregów liczbowych, granicę ciągu sum częściowych nazywamy sumą szeregu.

Jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$, to szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli $\|f_n\| \not\to 0$, to szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ nie jest zbieżny jednostajnie.

Jeżeli szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ o wyrazach będących funkcjami ciągłymi, jest zbieżny jednostajnie, to jego suma jest funkcją ciągłą.

Jeżeli wyrazy jednostajnie zbieżnego szeregu funkcyjnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ mają ciągłe pochodne, a szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n$ też jest zbieżny jednostajnie, to suma szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest funkcją różniczkowalną oraz

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n .$$

Analogicznie w przypadku pochodnych wyższych rzędów.

Obliczyć normę supremum funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem na podanej dziedzinie.

221. $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$, $D_f=\mathbb{R}$

222. $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$, $D_f=\mathbb{R}$

223. $f(x)=x^2$, $D_f=(-1,2)$

224. $f(x)=x^3$, $D_f=(-4,3)$

225. $f(x)=\operatorname{arctg} x$, $D_f=\mathbb{R}$

226. $f(x)=\operatorname{arctg}\sin x$, $D_f=\mathbb{R}$

227. $f(x)=\sin x+\cos x$, $D_f=\mathbb{R}$

228. $f(x)=x^3-x$, $D_f=(-1,1)$

Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji f zdefiniowanej podanym wzorem na podanej dziedzinie.

229. $f(x)=\frac{7x^4+11x^2+13}{2x^4+3x^2+5}$, $D_f=\mathbb{R}$

230. $f(x)=\frac{11x^4-7x^2+13}{3x^4-2x^2+5}$, $D_f=\mathbb{R}$

231. $f(x)=\frac{2^x+5^x+8^x}{2^x+4^x+8^x}$, $D_f=\mathbb{R}$

232. $f(x)=\int\limits_0^x\frac{dt}{t^4+1}$, $D_f=(0,+\infty)$

233. Dowieść, że szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2+1}$$
jest zbieżny, a jego suma jest funkcją ciągłą.

234. Dowieść, że szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3+8}$$
jest zbieżny, a jego suma jest funkcją różniczkowalną i ma ciągłą pochodną.

235. Dowieść, że szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^n x}{\binom{3n}{n}^2}$$
jest zbieżny, a jego suma jest funkcją pięciokrotnie różniczkowalną i ma ciągłe pochodne do rzędu piątego włącznie.

236. Dowieść, że szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{3^n+1}$$
jest zbieżny, a jego suma jest funkcją mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów.

237. Dowieść, że szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot\sin nx+\cos n^2x}{n^8+88}$$
jest zbieżny, a jego suma jest funkcją trzykrotnie różniczkowalną i ma ciągłe pochodne do rzędu trzeciego włącznie.

238. Dowieść, że szereg
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^{2020}x}{2^n}$$
jest zbieżny, a jego suma jest funkcją mającą ciągłe pochodne wszystkich rzędów.

239. W każdym z zadań **239.1-239.15** podaj normę supremum funkcji f o podanym wzorze i dziedzinie.

239.1. $f(x)=7\sin x$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=$ ....

239.2. $f(x)=7\sin x-3$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=$ ....

239.3. $f(x)=7\sin^2 x-3$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=$ ....

239.4. $f(x)=7\sin^3 x-3$, $D_f=\mathbb{R}$, $\|f\|=$ ....

239.5. $f(x)=\log_2 x-2$, $D_f=\left(\frac{1}{8},\, 8\right)$, $\|f\|=$ ....

239.6. $f(x)=\log_2 x-2$, $D_f=(2,\, 32)$, $\|f\|=$ ....

239.7. $f(x)=(\log_2 x)^2-6$, $D_f=\left(\frac{1}{8},\, 4\right)$, $\|f\|=$ ....

239.8. $f(x)=(\log_2 x)^3-6$, $D_f=\left(\frac{1}{8},\, 4\right)$, $\|f\|=$ ....

239.9. $f(x)=(\log_2 x)^4-6$, $D_f=\left(\frac{1}{8},\, 4\right)$, $\|f\|=$ ....

239.10. $f(x)=\sqrt{x^2+3x}-x$, $D_f=(1,\, +\infty)$, $\|f\|=$ ....

239.11. $f(x)=\sqrt{x^2+8x}-x$, $D_f=(1,\, +\infty)$, $\|f\|=$ ....

239.12. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+7x^2}-x$, $D_f=(1,\, +\infty)$, $\|f\|=$ ....

239.13. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+26x^2}-x$, $D_f=(1,\, +\infty)$, $\|f\|=$ ....

239.14. $f(x)=\sqrt[4]{x^4+15x^3}-x$, $D_f=(1,\, +\infty)$, $\|f\|=$ ....

239.15. $f(x)=\sqrt[4]{x^4+80x^3}-x$, $D_f=(1,\, +\infty)$, $\|f\|=$ ....

---

240. Oszacować od góry (przez dowolną, ale konkretną liczbę) normę supremum funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zdefiniowanej wzorem

$$f(x)=\frac{6x^6-x^2+7}{8x^8-x^4+11}\,.$$

Wskazówka: Oszacuj podane wyrażenie osobno w przypadkach $|x|<1$ i $|x|\geqslant 1$

241. Dany jest szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F, gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x)=\frac{\sin 2^n x}{333^n}\,.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m, dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m-krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k\leqslant m$ zachodzi równość $F^{(k)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

242. Niech

$$f_n(x)=\frac{\cos\left(n^3\cdot x\right)}{n^{20}}\,.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

243. Dany jest szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ o sumie F, gdzie funkcje f_n są dane wzorami

$$f_n(x)=\frac{\cos n^8 x}{n^{60}}\,.$$

Wyznaczyć największą liczbę naturalną m, dla której prawdziwe jest następujące zdanie: Funkcja F jest m-krotnie różniczkowalna, a ponadto dla każdej liczby całkowitej dodatniej $k\leqslant m$ zachodzi równość $F^{(k)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$.

244. Niech

$$f_n(x)=\frac{\cos\left(\binom{2n}{n}\cdot x\right)}{\binom{3n}{n}^4}\,.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

245. Niech

$$f_n(x)=\frac{\cos(n!\cdot x)}{(3n)!}\,.$$

Wskazując odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią k udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ jest jednostajnie zbieżny, ale szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k+1)}$ nie jest jednostajnie zbieżny.