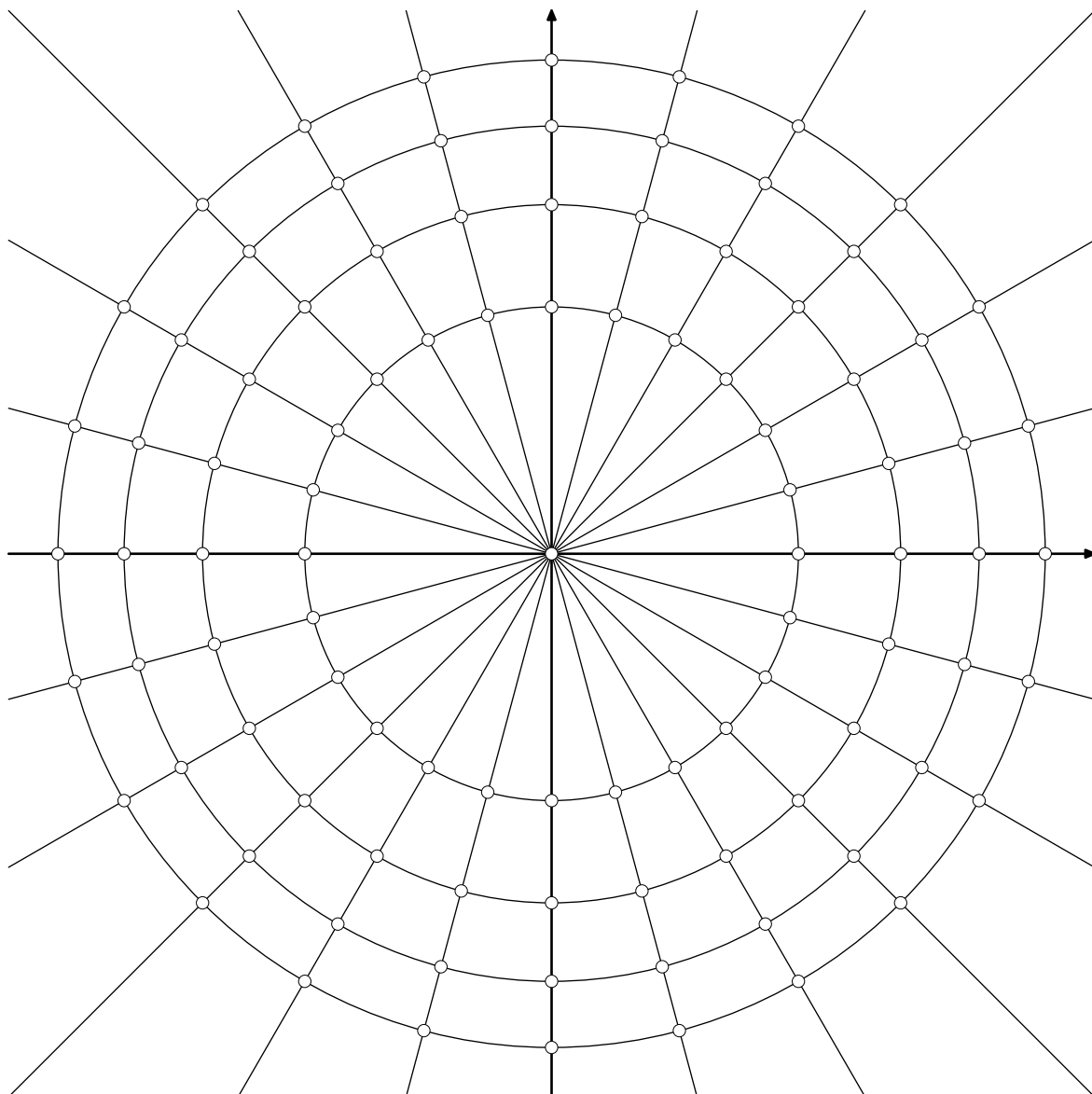


Zadania do omówienia na ćwiczeniach¹ we wtorek/środę 10/11.05.2022.

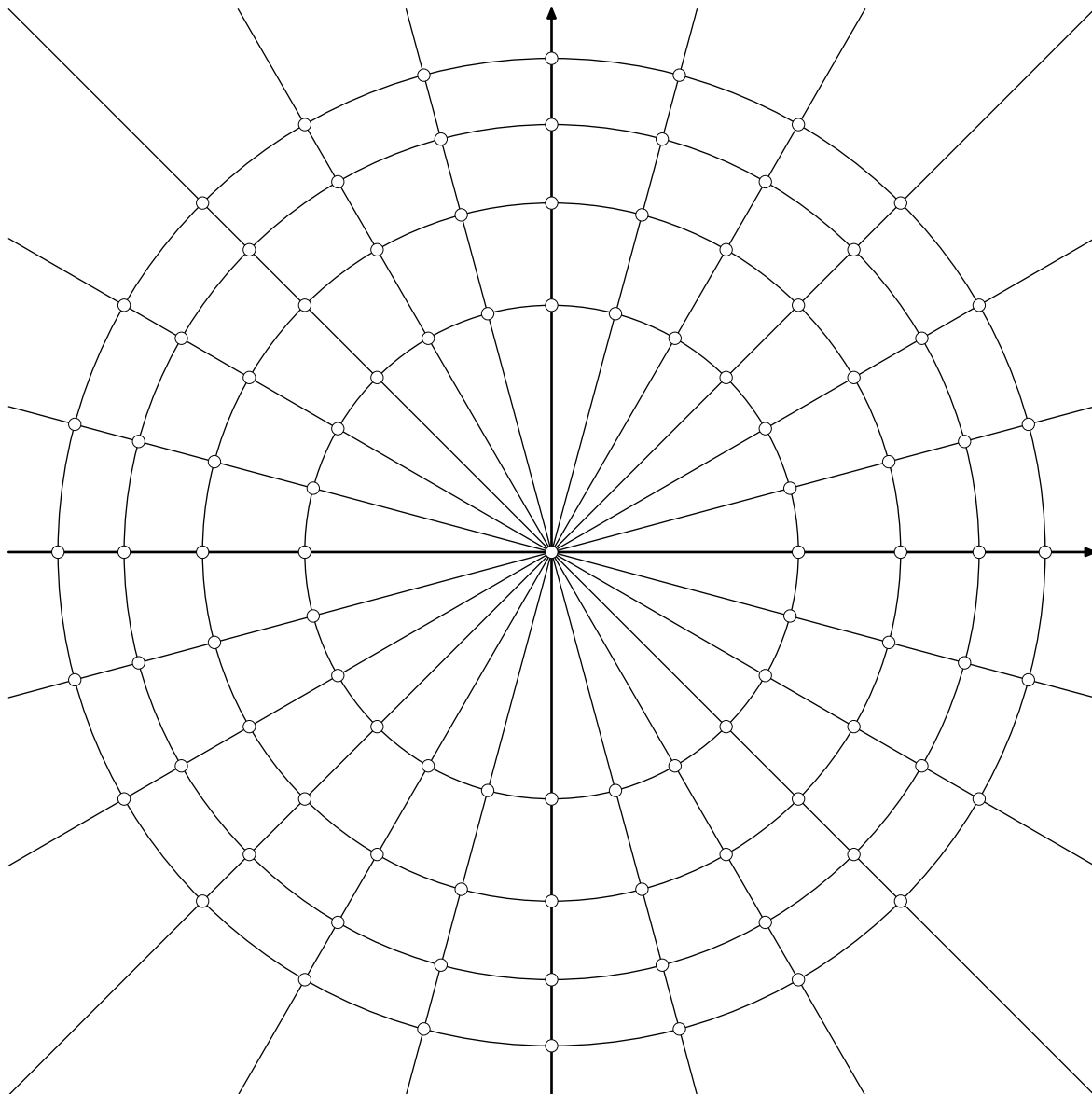
Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami.

206. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^4 = -4$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach \sqrt{n} dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .

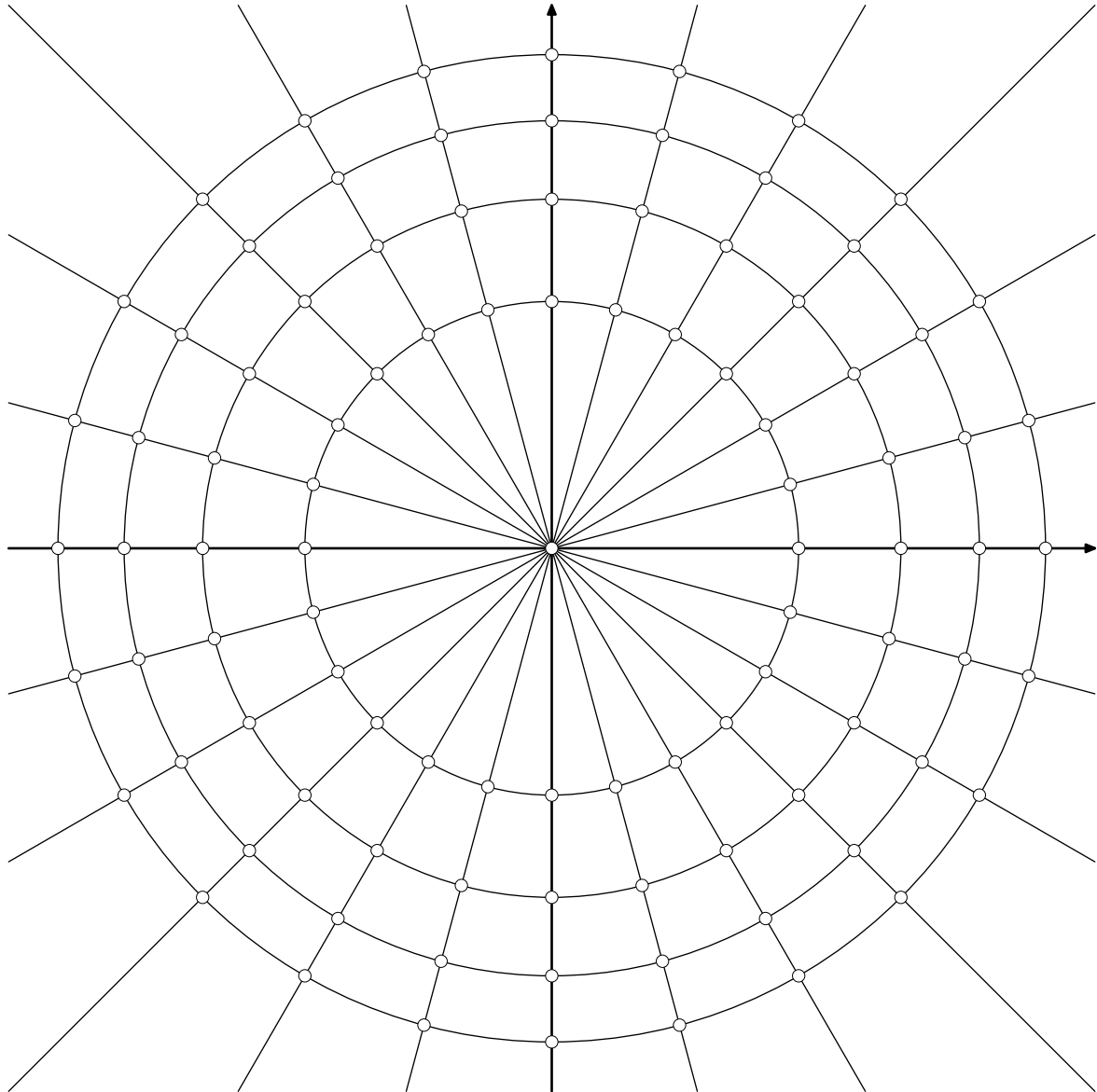


¹Na pierwszej godzinie ćwiczeń będzie kolokwium.

207. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^9 = 27z^3$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach \sqrt{n} dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .



208. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $z^7 + 4z^3 = 8z^4 + 32$ w liczbach zespolonych. Zapisać wszystkie rozwiązania w postaci kartezjańskiej (bez używania funkcji trygonometrycznych) oraz zaznaczyć wszystkie rozwiązania na płaszczyźnie zespolonej wykorzystując zamieszczony niżej rysunek, na którym narysowano okręgi o środku w zerze i promieniach \sqrt{n} dla $n = 1, 2, 3, 4$ oraz proste przechodzące przez punkt 0, co 15° .



209. Obliczyć wartość całki

$$\int_0^{\pi} \sin^7 x \, dx .$$

Przedstawić wynik w postaci ułamka nieskracalnego o dwucyfrowym liczniku i mianowniku.

210. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{\pi/6} \cos^6 x \, dx .$$

211. Obliczyć całkę

$$\int_0^{\pi} \sin^8 x \, dx .$$

212. Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx .$$

Doprowadzić wynik do postaci $w \cdot \pi$, gdzie w liczbą wymierną.

213. Udowodnić nierówność

$$\int_0^{4\pi} \cos^{10} x \, dx < \pi .$$

214. Znaleźć taką funkcję dwukrotnie różniczkowalną $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$f''(x) = \cos^4 x \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R} ,$$

a ponadto $f(0) = f(\pi) = 0$. Obliczyć $f(2\pi)$.

215. Wyznaczyć taką liczbę wymierną $a < 7$, że

$$\int_a^7 \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{4} .$$

216. Podaj wartość całki oznaczonej. Wynik zapisz w postaci w albo $w \cdot \sqrt{p}$, gdzie w jest liczbą wymierną zapisaną w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego, a p jest liczbą pierwszą.

a) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx = \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{\pi/3} \sin^3 x \, dx = \dots\dots\dots$

c) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^3 x \, dx = \dots\dots\dots$

d) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3 x \, dx = \dots\dots\dots$

217. Podaj w postaci przedziału zbiór wszystkich wartości rzeczywistych dodatnich parametru p , dla których podana liczba zespolona z spełnia nierówność $|z - 1| > |z - 3|$.

a) $z = \log_2 p + i \cdot \log_3 p, \dots\dots\dots$

b) $z = \log_3 p + i \cdot \log_5 p, \dots\dots\dots$

c) $z = \log_5 p + i \cdot \log_7 p, \dots\dots\dots$

d) $z = \log_7 p + i \cdot \log_2 p, \dots\dots\dots$

218. Niech $z = 1 - i$. Podaj w postaci kartezjańskiej:

a) $z^7 = \dots\dots\dots$

b) $z^8 = \dots\dots\dots$

c) $z^9 = \dots\dots\dots$

d) $z^{10} = \dots\dots\dots$

219. Niech $z = \sqrt{3} + i$. Podaj część rzeczywistą potęgi liczby z :

a) $\operatorname{Re}(z^5) = \dots\dots\dots$

b) $\operatorname{Re}(z^6) = \dots\dots\dots$

c) $\operatorname{Re}(z^7) = \dots\dots\dots$

d) $\operatorname{Re}(z^8) = \dots\dots\dots$

220. Podaj taką liczbę rzeczywistą dodatnią a , aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $\bar{z} = z^{-1}$.

a) $z = \frac{2}{3} + ai, \quad a = \dots\dots\dots$

b) $z = \frac{3}{5} + ai, \quad a = \dots\dots\dots$

c) $z = \frac{1}{4} + ai, \quad a = \dots\dots\dots$

d) $z = \frac{4}{5} + ai, \quad a = \dots\dots\dots$