193. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{2n}{n} \cdot x^n}{n!}.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego szeregu traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{(n+1)^{n+1} \cdot \binom{2n+2}{n+1} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot \binom{2n}{n} \cdot x^n}\right| = \left|\frac{(n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot x}{(n+1)} \cdot \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}}\right| =$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot |x| \cdot \frac{(2n+1) \cdot (2n+2)}{(n+1) \cdot (n+1)} \to 4e \cdot |x|$$

przy $n \to \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu równej $4e \cdot |x|$.

Jeżeli $4e \cdot |x| < 1$, czyli $|x| < \frac{1}{4e}$, to szereg jest zbieżny.

Jeżeli zaś $4e \cdot |x| > 1$, czyli $|x| > \frac{1}{4e}$, to szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy $\frac{1}{4e}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{1}{4e}$.

194. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot x^{2n}}{(2n)! \cdot n! \cdot n^n}. \tag{1}$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{(4n+4)! \cdot x^{2n+2}}{(2n+2)! \cdot (n+1)! \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(2n)! \cdot n! \cdot n^n}{(4n)! \cdot x^{2n}}\right| =$$

$$= \frac{(4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4) \cdot x^2}{(2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} \to \frac{64 \cdot x^2}{e}$$

przy $n \to \infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (1) równej $\frac{64 \cdot x^2}{e}$.

Jeżeli $\frac{64 \cdot x^2}{e} < 1$, czyli $|x| < \frac{\sqrt{e}}{8}$, to szereg (1) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{64\cdot x^2}{e}>1$, czyli $|x|>\frac{\sqrt{e}}{8}$, to szereg (1) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $\frac{\sqrt{e}}{8}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{\sqrt{e}}{8}$.

195. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}\cdot(2n)!\cdot x^{4n}}{n!\cdot n^n}\,. \tag{2}$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (2) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x\neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{\binom{2n+2}{n+1}\cdot(2n+2)!\cdot x^{4n+4}}{(n+1)!\cdot(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n!\cdot n^n}{\binom{2n}{n}\cdot(2n)!\cdot x^{4n}}\right|=$$

$$=\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}}\cdot\frac{(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot|x|^4}{(n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot(n+1)}=$$

$$=\frac{2\cdot(2n+1)}{n+1}\cdot\frac{2\cdot(2n+1)}{n+1}\cdot\frac{x^4}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\to 16\cdot\frac{x^4}{e}\,.$$

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (2) równej $16\cdot\frac{x^4}{e}$.

Jeżeli $16\cdot\frac{x^4}{e}<1$, czyli $|x|<\frac{\sqrt[4]{e}}{2}$, to szereg (2) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $16\cdot\frac{x^4}{e}>1$, czyli $|x|>\frac{\sqrt[4]{e}}{2}$, to szereg (2) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (2) jest równy $\frac{\sqrt[4]{e}}{2}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{\sqrt[4]{e}}{2}$.

196. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\cdot\binom{2n}{n}^3\cdot x^{5n}}{n!\cdot 2^n}\,. \tag{3}$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (3) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x\neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{(n+1)^{n+1}\cdot\binom{2n+2}{n+1}^3\cdot x^{5n+5}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{n!\cdot 2^n}{n^n\cdot\binom{2n}{n}^3\cdot x^{5n}}\right|=\left|\frac{(n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot x^5}{(n+1)\cdot 2}\cdot\frac{\binom{2n+2}{n+1}^3}{\binom{2n}{n}^3}\right|=$$

$$=\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot|x|^5}{2}\cdot\frac{(2n+1)^3\cdot(2n+2)^3}{(n+1)^3\cdot(n+1)^3}\to 32e\cdot|x|^5$$

przy $n\to\infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (3) równej $32e\cdot|x|^5$.

Jeżeli $32e\cdot|x|^5<1$, czyli $|x|<\frac{1}{2\cdot\sqrt[5]{e}}$, to szereg (3) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $32e\cdot|x|^5>1$, czyli $|x|>\frac{1}{2\cdot\sqrt[5]{e}}$, to szereg (3) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (3) jest równy $\frac{1}{2\cdot\sqrt[5]{e}}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $\frac{1}{2\cdot\sqrt[5]{e}}$.

197. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^3}}{(n!)^n}\,.$$

Rozwiązanie:

Zastosujmy kryterium Cauchy'ego do zbadania zbieżności danego szeregu. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left|\frac{x^{n^3}}{(n!)^n}\right|}=\frac{|x|^{n^2}}{n!}=b_n\,.$$

Ponieważ nie umiemy od razu stwierdzić, do czego dąży b_n przy $n\to\infty$, stosujemy kryterium d'Alemberta, tym razem do **ciągu** (b_n). Otrzymujemy

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{|x|^{2n+1}}{n+1}=c_n\,.$$

Jeżeli nie umiemy od razu stwierdzić, do czego dąży c_n przy $n\to\infty$, stosujemy ponownie kryterium d'Alemberta, tym razem do **ciągu** (c_n). Otrzymujemy

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=x^2\cdot\frac{n+1}{n+2}\to x^2$$

przy $n\to\infty$.

Jeżeli $|x|<1$, czyli $x^2<1$, to z kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (c_n) wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0<1$.

Z kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (b_n) wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0<1$. Także dla $x=\pm1$ otrzymujemy $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$.

Wobec tego z kryterium Cauchy'ego zastosowanego do danego szeregu potęgowego wynika, że jest on zbieżny.

Jeżeli $|x|>1$, czyli $x^2>1$, to z kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (c_n) wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=+\infty>1$.

Z kryterium d'Alemberta zastosowanego do ciągu (b_n) wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty>1$.

Wobec tego z kryterium Cauchy'ego zastosowanego do danego szeregu potęgowego wynika, że jest on rozbieżny.

Odpowiedź: Przedziałem zbieżności danego szeregu potęgowego jest $[-1, 1]$.

198. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^4}\cdot x^{n^4}}{(n!)^{n^3}}\,. \tag{4}$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy n-ty wyraz szeregu (4) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem x przez a_n i zastosujmy do niego kryterium Cauchy'ego. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{\left|\frac{n^{n^4}\cdot x^{n^4}}{(n!)^{n^3}}\right|}=\frac{n^{n^3}\cdot |x|^{n^3}}{(n!)^{n^2}}=b_n\,.$$

W celu obliczenia granicy ciągu (b_n) stosujemy kryterium Cauchy'ego do tego ciągu. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{b_n}=\sqrt[n]{\frac{n^{n^3}\cdot |x|^{n^3}}{(n!)^{n^2}}}=\frac{n^{n^2}\cdot |x|^{n^2}}{(n!)^{n}}=c_n\,.$$

W celu obliczenia granicy ciągu (c_n) stosujemy kryterium Cauchy'ego do tego ciągu. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{c_n}=\sqrt[n]{\frac{n^{n^2}\cdot |x|^{n^2}}{(n!)^{n}}}=\frac{n^{n}\cdot |x|^{n}}{n!}=d_n\,.$$

W celu obliczenia granicy ciągu (d_n) w przypadku $x\neq 0$ stosujemy kryterium d'Alemberta do tego ciągu. Otrzymujemy

$$\frac{d_{n+1}}{d_n}=\frac{(n+1)^{n+1}\cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n\cdot |x|^n}=|x|\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\to e\cdot|x|$$

przy $n\to\infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów ciągu (d_n) równej $e\cdot|x|$.

Jeżeli $e\cdot|x|<1$, czyli $|x|<1/e$, to na mocy kryterium d'Alemberta

$$\lim_{n\to\infty} d_n=0<1\,,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (c_n) mamy

$$\lim_{n\to\infty} c_n=0<1\,,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (b_n) dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n=0<1\,,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do szeregu (4) wnioskujemy, że szereg ten jest zbieżny.

Jeżeli zaś $e\cdot|x|>1$, czyli $|x|>1/e$, to na mocy kryterium d'Alemberta

$$\lim_{n\to\infty} d_n = +\infty > 1\,,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (c_n) mamy

$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty > 1\,,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do ciągu (b_n) dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty > 1\,,$$

skąd na mocy kryterium Cauchy'ego zastosowanego do szeregu (4) wnioskujemy, że szereg ten jest rozbieżny.

Zatem promień zbieżności szeregu potęgowego (4) jest równy $1/e$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma promień zbieżności $1/e$.

199. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\cdot(4n)!\cdot x^{pn}}{n!\cdot n^{pn}} \tag{5}$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p, aby promień ten był dodatni i skończony.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (5) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x\neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{(2n+2)!\cdot(4n+4)!\cdot x^{pn+p}}{(n+1)!\cdot(n+1)^{pn+p}}\cdot\frac{n!\cdot n^{pn}}{(2n)!\cdot(4n)!\cdot x^{pn}}\right| =$$

$$= \frac{(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot(4n+1)\cdot(4n+2)\cdot(4n+3)\cdot(4n+4)\cdot|x|^p}{(n+1)\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{pn}\cdot(n+1)^p} =$$

$$= \frac{8\cdot(2n+1)\cdot(4n+1)\cdot(4n+2)\cdot(4n+3)}{(n+1)^{p-1}}\cdot\frac{|x|^p}{\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^p} \to 2^{10}\cdot\frac{|x|^p}{e^p}$$

przy $n\to\infty$, o ile $p-1=4$, bo tylko w tym przypadku pierwszy czynnik powyższego iloczynu ma granicę rzeczywistą dodatnią.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (5) równej $2^{10}\cdot\frac{|x|^5}{e^5}$ dla $p=5$.

Jeżeli $2^{10}\cdot\frac{|x|^5}{e^5}<1$, czyli $|x|<\frac{e}{4}$, to szereg (5) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $2^{10}\cdot\frac{|x|^5}{e^5}>1$, czyli $|x|>\frac{e}{4}$, to szereg (5) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (5) jest równy $\frac{e}{4}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma dla $p=5$ promień zbieżności $\frac{e}{4}$.

200. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n\cdot 64^n}\cdot x^{3n}}{5n+7}.$$

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego szeregu potęgowego traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x\neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{\sqrt{(n+1)\cdot 64^{n+1}}\cdot x^{3n+3}}{5n+12}\cdot\frac{5n+7}{\sqrt{n\cdot 64^n}\cdot x^{3n}}\right| = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot 8\cdot |x|^3\cdot\frac{5n+7}{5n+12}\to 8\cdot |x|^3$$

przy $n\to\infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów danego szeregu potęgowego równej $8\cdot |x|^3$.

Jeżeli $8\cdot |x|^3<1$, czyli $|x|<1/2$, to szereg jest zbieżny.
Jeżeli zaś $8\cdot |x|^3>1$, czyli $|x|>1/2$, to szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy $1/2$.

Dla $x=1/2$ otrzymujemy szereg, który na mocy kryterium porównawczego jest rozbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{5n+7}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{5n+7n}=\frac{1}{12}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=+\infty.$$

Dla $x=-1/2$ otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot(-1)^n}{5n+7},$$

który jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Aby to udowodnić, musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne – oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{5n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{5+\frac{7}{n}}=\frac{0}{5+0}=0.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.
Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{\sqrt{n}}{5n+7}\geqslant\frac{\sqrt{n+1}}{5n+12},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\sqrt{n}\cdot(5n+12)\geqslant\sqrt{n+1}\cdot(5n+7)\,,$$

$$n\cdot(5n+12)^2\geqslant(n+1)\cdot(5n+7)^2\,,$$

$$n\cdot\left(25n^2+120n+144\right)\geqslant(n+1)\cdot\left(25n^2+70n+49\right)\,,$$

$$25n^3+120n^2+144n\geqslant25n^3+95n^2+119n+49\,,$$

$$25n^2+25n\geqslant49\,,$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny dla $x=-1/2$ na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma przedział zbieżności $[-1/2,\,1/2)$.

Uwaga: Stosowanie kryterium d'Alemberta nie jest konieczne, ale jego unikanie nie wydaje się specjalnie praktyczne. Można bowiem wyobrazić sobie następujące rozwiązanie:
• Jakimś sposobem zgadujemy, że promień zbieżności jest równy $1/2$.
• Dowodzimy jak w przedstawionym rozwiązaniu, że szereg jest rozbieżny dla $x=1/2$ i zbieżny dla $x=-1/2$.
• Przedstawiamy rozumowanie, z którego wynika, że jeśli szereg potęgowy jest rozbieżny dla $x=1/2$ i zbieżny dla $x=-1/2$, to jego promień zbieżności jest równy $1/2$.

201. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n+2)^n\cdot x^n}{(7n+3)^n}\,.$$

Jeśli nie potrafisz, to przynajmniej wyznacz promień zbieżności.

Rozwiązanie:

Zastosujmy kryterium Cauchy'ego do zbadania zbieżności danego w zadaniu szeregu traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem x. Otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(5n+2)^n\cdot x^n}{(7n+3)^n}\right|}=\frac{(5n+2)\cdot|x|}{7n+3}\to\frac{5\cdot|x|}{7}\,.$$

Jeżeli $\frac{5\cdot|x|}{7}<1$, czyli $|x|<\frac{7}{5}$, to dany w zadaniu szereg jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{5\cdot|x|}{7}>1$, czyli $|x|>\frac{7}{5}$, to dany w zadaniu szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego jest równy $\frac{7}{5}$.

Pozostaje rozstrzygnąć zbieżność szeregu na końcach przedziału zbieżności, czyli dla $x=\pm7/5$. W tym przypadku rozważymy ciąg wartości bezwzględnych wyrazów szeregu:

$$\left|\frac{(5n+2)^n\cdot x^n}{(7n+3)^n}\right|=\frac{(5n+2)^n\cdot7^n}{(7n+3)^n\cdot5^n}=\frac{(35n+14)^n}{(35n+15)^n}=\left(1-\frac{1}{35n+15}\right)^n=$$

$$= \left(\left(1 - \frac{1}{35n+15} \right)^{35n+15} \right)^{\frac{n}{35n+15}} \to \left(e^{-1}\right)^{1/35} = \frac{1}{\sqrt[35]{e}} \neq 0\,.$$

Ponieważ wartości bezwzględne wyrazów szeregu dążą do liczby różnej od zera, szereg jest rozbieżny.

Odpowiedź:
Przedziałem zbieżności danego szeregu potęgowego jest przedział $(-7/5, 7/5)$.

202. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = x^{22} \cdot e^{x^7}\,.$$

Obliczyć $f^{(k)}(0)$ dla $k=50$, 51, 52, ..., 60.

Rozwiązanie:
Ze wzoru[1]

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

wynika

$$e^{x^7} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{7n}}{n!}$$

i w konsekwencji

$$f(x) = x^{22} \cdot e^{x^7} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{7n+22}}{n!}\,.$$

Zapisaliśmy więc funkcję f w postaci sumy szeregu potęgowego zbieżnego na całej prostej. Ze współczynników tego szeregu można odczytać pochodne funkcji f w zerze, a dokładniej: jeśli w szeregu występuje wyraz $a_k x^k$, to

$$f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k\,.$$

Interesujące nas niezerowe wyrazy szeregu potęgowego odpowiadają $n=4$, $k=50$ oraz $n=5$, $k=57$.

Wobec tego

$$f^{(50)}(0) = \frac{50!}{4!}\,,$$

$$f^{(57)}(0) = \frac{57!}{5!}$$

oraz

$$f^{(k)}(0) = 0$$

dla pozostałych k wymienionych w treści zadania.

[1]Jeśli czujesz się niepewnie patrząc na wzory ze znakiem $\sum$, rozpisz sobie każdą z sum "z kropeczkami", aby wyraźnie widzieć, jakie składniki zawiera.

203. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą zdefiniowaną dla $x\neq 0$ wzorem

$$f(x)=\frac{e^x-\sum\limits_{n=0}^{2020}\frac{x^n}{n!}}{x^{2021}}\,.$$

Obliczyć $f(0)$ oraz $f'(0)$.

Rozwiązanie:

Ze wzoru

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

wynika

$$e^x-\sum_{n=0}^{2020}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=2021}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

i w konsekwencji

$$f(x)=\frac{e^x-\sum\limits_{n=0}^{2020}\frac{x^n}{n!}}{x^{2021}}=\sum_{n=2021}^{\infty}\frac{x^{n-2021}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2021)!}\,.$$

Dla $x\neq 0$ zapisaliśmy więc funkcję f w postaci sumy szeregu potęgowego zbieżnego na całej prostej, a ponieważ zarówno funkcja f jak i suma powyższego szeregu potęgowego są funkcjami ciągłymi, równość zachodzi także dla $x=0$.

Wobec tego[2]

$$f(0)=\frac{1}{2021!}$$

oraz[3]

$$f'(0)=\frac{1}{2022!}\,.$$

204. Obliczyć sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\,.$$

Wskazówka: Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\,.$$

W tym celu zastanowić się, jakiego prostego szeregu pochodną jest ten szereg lub szereg bardzo do niego zbliżony.

Rozwiązanie:

Po obustronnym zróżniczkowaniu wzoru[4]

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

[2]Uwzględniając wyraz ostatniego szeregu odpowiadający $n=0$.
[3]Uwzględniając pochodną wyrazu odpowiadającego $n=1$.
[4]Wzór ten jest prawdziwy dla $x\in(-1,1)$.

otrzymujemy[5]

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},$$

skąd po obustronnym wymnożeniu przez x dostajemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Podstawienie $x=1/2$ daje po lewej stronie szereg liczbowy z treści zadania, a prawa strona jest równa **2.**

Odpowiedź: Szereg liczbowy podany w treści zadania ma sumę **2.**

W poniższym zadaniu masz podany szkielet rozwiązania. Twoje zadanie to uzupełnić brakujące fragmenty w miejscu kropek.

205. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3n+1}. \tag{1}$$

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego definiującego funkcję f jest przedział $[-1,1)$. Na tym przedziale funkcja f jest ciągła, a we wnętrzu tego przedziału możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem. Tak więc we wnętrzu przedziału zbieżności funkcji f mamy

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n} = \frac{1}{1-x^3}.$$

Zatem funkcja f jest funkcją pierwotną powyższej funkcji i do znalezienia wzoru definiującego funkcję f bez szeregu potęgowego wystarczy obliczyć całkę $\int f'(x)dx$.

Korzystając ze wzoru

$$\int \frac{ax^2+bx+c}{1-x^3}dx =$$

$$= (c-b)\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{(b+c)\ln|1-x|}{3} + \frac{(b+c)\ln\left(x^2+x+1\right)}{6} - \frac{a\ln\left|1-x^3\right|}{3} + C$$

dla $a=0$, $b=0$, $c=1$ otrzymujemy

$$f(x) = \int f'(x)dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\ln|1-x|}{3} + \frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{6} + C. \tag{2}$$

[5]Składnik odpowiadający $n=0$ jest zerowy, więc go pomijamy.

W celu dobrania odpowiedniej stałej całkowania C porównujemy wzory (1) i (2) dla $x=0$. Zgodnie ze wzorem (1)

$$f(0)=0\,,$$

natomiast wzór (2) daje

$$f(0)=\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}(1/\sqrt{3})-\frac{\ln 1}{3}+\frac{\ln 1}{6}+C=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}+C\,.$$

Stąd

$$C=-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

i ostatecznie

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\ln|1-x|}{3}+\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{6}-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}\,. \tag{3}$$

Przyjmując $x=-1$ we wzorze (1) otrzymujemy dany w zadaniu szereg liczbowy jako równy $-f(-1)$. Z drugiej strony wzór (3) daje

$$f(-1)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\mathrm{arctg}\left(-1/\sqrt{3}\right)-\frac{\ln 2}{3}+\frac{\ln 1}{6}-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}=-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}-\frac{\ln 2}{3}-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}=-\frac{\sqrt{3}\pi}{9}-\frac{\ln 2}{3}\,.$$

Odpowiedź: Suma danego w zadaniu szeregu liczbowego jest równa $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}+\frac{\ln 2}{3}$.