Kolokwium nr 2: materiał zadań 1–205.
Grupy 1, 2, 3: wtorek 10.05.2022, godz. 12:15-13:00.
Grupa 4: środa 11.05.2022, godz. 16:15-17:00.

Zadania 193-197 do samodzielnego rozwiązania (grupy 1–3).

Zadania 198-205 do omówienia na konwersatorium w czwartek 5.05.2022.

Na ćwiczeniach grupy 4 w środę 4.05.2022 będzie omawiana cała lista oraz będę odpowiadał na pytania dotyczące zadań od początku semestru.

Zadania należy spróbować rozwiązać przed zajęciami.

193. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{2n}{n} \cdot x^n}{n!} .$$

194. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n)! \cdot x^{2n}}{(2n)! \cdot n! \cdot n^n} .$$

195. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n} \cdot (2n)! \cdot x^{4n}}{n! \cdot n^n} .$$

196. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \cdot \binom{2n}{n}^3 \cdot x^{5n}}{n! \cdot 2^n} .$$

197. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{(n!)^n} .$$

198. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^4} \cdot x^{n^4}}{(n!)^{n^3}} .$$

199. Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)! \cdot (4n)! \cdot x^{pn}}{n! \cdot n^{pn}}$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p, aby promień ten był dodatni i skończony.

200. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n\cdot 64^n}\cdot x^{3n}}{5n+7}.$$

201. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n+2)^n\cdot x^n}{(7n+3)^n}.$$

Jeśli nie potrafisz, to przynajmniej wyznacz promień zbieżności.

202. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=x^{22}\cdot e^{x^7}.$$

Obliczyć $f^{(k)}(0)$ dla $k=50, 51, 52, \ldots, 60$.

203. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą zdefiniowaną dla $x\neq 0$ wzorem

$$f(x)=\frac{e^x-\sum\limits_{n=0}^{2020}\frac{x^n}{n!}}{x^{2021}}.$$

Obliczyć $f(0)$ oraz $f'(0)$.

204. Obliczyć sumę

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$$

Wskazówka: Obliczyć sumę szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n.$$

W tym celu zastanowić się, jakiego prostego szeregu pochodną jest ten szereg lub szereg bardzo do niego zbliżony.

W poniższym zadaniu masz podany szkielet rozwiązania. Twoje zadanie to uzupełnić brakujące fragmenty w miejscu kropek.

205. Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję f daną wzorem

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}. \tag{1}$$

Przedziałem zbieżności szeregu potęgowego definiującego funkcję f jest przedział .... Na tym przedziale funkcja f jest ciągła, a we wnętrzu tego przedziału możemy różniczkować szereg potęgowy wyraz za wyrazem. Tak więc we wnętrzu przedziału zbieżności funkcji f mamy

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ .$$

Zatem funkcja f jest funkcją pierwotną powyższej funkcji i do znalezienia wzoru definiującego funkcję f bez szeregu potęgowego wystarczy obliczyć całkę $\int f'(x)dx$.

Korzystając ze wzoru

$$\int\frac{ax^2+bx+c}{1-x^3}dx=$$

$$=(c-b)\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{1+2x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{(b+c)\ln|1-x|}{3}+\frac{(b+c)\ln\left(x^2+x+1\right)}{6}-\frac{a\ln\left|1-x^3\right|}{3}+C$$

dla $a=$ ...., $b=$ ...., $c=$ .... otrzymujemy

$$f(x)=\int f'(x)dx=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ .\qquad(2)$$

W celu dobrania odpowiedniej stałej całkowania C porównujemy wzory (1) i (2) dla $x=$ .... Zgodnie ze wzorem (1)

$$f(\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ ,$$

natomiast wzór (2) daje

$$f(\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+C=$$

$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+C\ .$$

Stąd

$$C=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

i ostatecznie

$$f(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ .\qquad(3)$$

Przyjmując $x=$ ...... we wzorze (1) otrzymujemy dany w zadaniu szereg liczbowy jako równy .... Z drugiej strony wzór (3) daje

$$f(\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=$$

$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=$$

$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ .$$

Odpowiedź: Suma danego w zadaniu szeregu liczbowego jest równa

....