

Zadania do omówienia na ćwiczeniach we wtorek/środę 1/2.03.2022.**Zadania należy spróbować rozwiązać przed ćwiczeniami.****W zadaniach z tej listy nie używać całek, a w szczególności nie używać całkowania przez części ani całkowania przez podstawienie !!!**

Odgadnąć wzór na funkcję różniczkowalną $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, której pochodna jest dana wzorem:

1. $f'(x) = x^3$, $D_f = \mathbb{R}$

2. $f'(x) = 10x^4$, $D_f = \mathbb{R}$

3. $f'(x) = \sqrt{x}$, $D_f = (0, +\infty)$

4. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $D_f = (0, +\infty)$

5. $f'(x) = \frac{1}{x^3}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

6. $f'(x) = e^{7x}$, $D_f = \mathbb{R}$

7. $f'(x) = \sin 66x$, $D_f = \mathbb{R}$

8. $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $D_f = \mathbb{R}$

9. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje n -krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(n)}(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

10. Funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a ponadto wiadomo, że $f(1) = 0$. Co można wywnioskować o $f(2)$ oraz o $f(-1)$?

11. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$.

12. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1) = f'(1) = 0$.

13. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1) = f(2) = 0$.

14. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym $f(1) = f(-2) = 0$.

15. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje dwukrotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi równość $f''(x) = \frac{1}{x^3}$, a przy tym spełniony jest warunek $f(1) = f(2) = f(-2) = 0$.

16. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje 2020-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(2020)}(x) = e^{3x}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

17. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje 2020-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, że $f^{(2020)}(x) = \sin^2 x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

18. Dane są funkcje różniczkowalne $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. **Zapamiętać to zadanie, gdyż będzie wykorzystywane na wykładzie.**

19. Dane są funkcje różniczkowalne $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. **Zapamiętać to zadanie, gdyż będzie wykorzystywane na wykładzie.**

20. Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

21. Dana jest funkcja różniczkowalna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje różniczkowalne $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $g'(x) = f'(x) \cdot f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

22. Na wyspach Bergamutach podobno jest kot w butach i podobno zamiast zwykłych funkcji trygonometrycznych używają tam funkcji *losinus*, *nosinus* oraz *sosinus* podlegających następującym regułom różniczkowania:

$$\frac{d}{dx} \text{los } x = \text{nos } x, \quad \frac{d}{dx} \text{nos } x = \text{sos } x, \quad \frac{d}{dx} \text{sos } x = \text{los } x.$$

Wyznaczyć wszystkie funkcje 2020-krotnie różniczkowalne $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek $f^{(2020)}(x) = \text{los}(2020x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

23. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, różniczkowalne na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ warunek $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2}}$.

24. Wyznaczyć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które są dwukrotnie różniczkowalne na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i spełniają dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ warunek $f''(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2}}$. Wskazać wśród nich funkcję spełniającą dodatkowy warunek $f(-1) = f(1) = f(4) = 0$.

25. Funkcja ciągła $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a jej pochodna drugiego rzędu jest dana wzorem

$$f''(x) = 6x + 6 \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Ponadto wiadomo, że $f(x) = x$ dla $x \in \{-1, 0, 2\}$. Wyznaczyć $f(3)$.