ANALIZA 2, KOLOKWIUM nr 5P, 21.06.2022, godz. 12:15–14:30

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadania testowe (50 punktów – 1 punkt za każdą poprawną odpowiedź)

W każdym z zadań **1–20** podaj w **postaci uproszczonej** wartość całki oznaczonej.

---

1. $\int_{-2}^{10} |x|\,dx =$ .... **2.** $\int_{-1}^{9} |x|\,dx =$ ....

---

3. $\int_{0}^{10} |x-1|\,dx =$ .... **4.** $\int_{0}^{10} |x-3|\,dx =$ ....

---

5. $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx =$ .... **6.** $\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx =$ ....

---

7. $\int_{0}^{2} \sqrt{8-x^2}\,dx =$ .... **8.** $\int_{0}^{3} \sqrt{18-x^2}\,dx =$ ....

---

9. $\int_{0}^{4} \sqrt{32-x^2}\,dx =$ .... **10.** $\int_{0}^{5} \sqrt{50-x^2}\,dx =$ ....

---

11. $\int_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} =$ .... **12.** $\int_{1}^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} =$ ....

---

13. $\int_{9}^{14} \sqrt{x-5}\,dx =$ .... **14.** $\int_{3}^{7} \sqrt{2x-5}\,dx =$ ....

---

15. $\int_{2}^{4} \sqrt{4x-7}\,dx =$ .... **16.** $\int_{1}^{2} \sqrt{8x-7}\,dx =$ ....

---

17. $\displaystyle\int\limits_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} =$ ....

18. $\displaystyle\int\limits_1^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} =$ ....

19. $\displaystyle\int\limits_4^{16} \frac{dx}{1+\sqrt{x}} =$ ....

20. $\displaystyle\int\limits_9^{16} \frac{dx}{1+\sqrt{x}} =$ ....

W każdym z zadań **21–25** podaj w **postaci uproszczonej** promień zbieżności szeregu potęgowego.

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot x^n}{n^n}$ $R =$ ....

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot \binom{2n}{n}\cdot x^n}{n^n}$ $R =$ ....

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot \binom{2n}{n}\cdot x^{2n}}{n^n}$ $R =$ ....

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\cdot x^{2n}}{n^n\cdot n!}$ $R =$ ....

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot \binom{3n}{n}\cdot x^n}{n^n}$ $R =$ ....

W każdym z zadań **26–35** podaj w **postaci uproszczonej** normę supremum funkcji $f: D_f \to \mathbb{R}$ zdefiniowanej podanym wzorem na podanej dziedzinie.

---

26. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+10x+29}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$ $\qquad \|f\| = \ldots\ldots\ldots$

---

27. $f(x)=\dfrac{1}{x^4+10x^2+31}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$ $\qquad \|f\| = \ldots\ldots\ldots$

---

28. $f(x)=\dfrac{1}{x^8-10x^4+33}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$ $\qquad \|f\| = \ldots\ldots\ldots$

---

29. $f(x)=\dfrac{1}{x^{12}+10x^6+37}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$ $\qquad \|f\| = \ldots\ldots\ldots$

---

30. $f(x)=\dfrac{1}{x^{14}+10x^7+39}$ $\quad D_f=\mathbb{R}$ $\qquad \|f\| = \ldots\ldots\ldots$

---

31. $f(x)=2^x-7$ $\quad D_f=(2,\,3)$ $\qquad \|f\| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

---

32. $f(x)=(2^x-7)^2-7$ $\quad D_f=(2,\,3)$ $\qquad \|f\| = \ldots\ldots\ldots$

---

33. $f(x)=(2^x-7)^2-17$ $\quad D_f=(2,\,3)$ $\qquad \|f\| = \ldots\ldots$

---

34. $f(x)=(2^x-7)^3+7$ $\quad D_f=(2,\,3)$ $\qquad \|f\| = \ldots\ldots\ldots$

---

35. $f(x)=(2^x-7)^3+17$ $\quad D_f=(2,\,3)$ $\qquad \|f\| = \ldots\ldots\ldots$

W każdym z zadań **36–50** podaj sumę szeregu w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Wiadomo, że

$$a_1=2, \quad a_2=1 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5\,.$$

Wobec tego:

---

36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1}) = \dots\dots$ **37.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1}) = \dots\dots$

---

38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2-a_{n+1}^2\right) = \dots\dots$ **39.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^5-a_{n+1}^5\right) = \dots\dots$

---

40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+2}) = \dots\dots$ **41.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^3-a_{n+2}^3\right) = \dots\dots$

---

42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+1}}\right) = \dots\dots$ **43.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(3^{a_n}-3^{a_{n+1}}\right) = \dots\dots$

---

44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2^{a_n}-2^{a_{n+2}}\right) = \dots\dots$ **45.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(3^{a_n}-3^{a_{n+2}}\right) = \dots\dots$

---

46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2^{2^{a_n}}-2^{2^{a_{n+1}}}\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

---

47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(3^{2^{a_n}}-3^{2^{a_{n+1}}}\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

---

48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(3^{2^{a_n}}-3^{2^{a_{n+2}}}\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

---

49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+a_n^3}-\sqrt{1+a_{n+1}^3}\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

---

50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{9+a_n^4}-\sqrt{9+a_{n+1}^4}\right) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

ANALIZA 2, KOLOKWIUM nr 5P, 22.06.2022, godz. 16:15–18:30

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **21** **(10 punktów)**

Dowieść, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4^n+1}} < 1\,.$$

Zadanie **22** **(10 punktów)**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{x-1}{x^3+x}\,dx\,.$$

Zadanie **23** **(10 punktów)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{n^3+k^3}\,.$$

Zadanie **24** **(10 punktów)**

Obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{1}{x^2+4x+9}\,dx\,.$$

Zadanie **25** **(10 punktów)**

Obliczyć wartość całki

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx\,.$$

Zadanie **26** **(10 punktów)**

Zapisać liczbę

$$2\cdot \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 7$$

w postaci niezawierającej "arctg".

ANALIZA 2, KOLOKWIUM nr 5S, 21.06.2022, godz. 12:15–14:30

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **31 (10 punktów)**

Wiedząc, że

$$\int_1^5 \sqrt{50-x^2}\,dx \approx 25{,}0875\,,$$

wyznaczyć

$$\int_5^7 \sqrt{50-x^2}\,dx$$

z dokładnością do czterech cyfr po przecinku.

Zadanie **32 (10 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^3\cdot(n+1)^3}\,.$$

Zadanie **33 (10 punktów)**

Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\cdot(n+1)^2}\,.$$

Zadanie **34 (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx\,.$$

Zadanie **35 (10 punktów)**

Niech

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}\,.$$

Obliczyć wartość całki

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cdot f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\,dx\,.$$

ANALIZA 2, KOLOKWIUM nr 5S, 22.06.2022, godz. 16:15–18:30

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOLOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **36** **(10 punktów)**

Obliczyć

$$\left[\sum_{n=9}^{1000}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right],$$

gdzie [.] oznacza część całkowitą.

Zadanie **37** **(10 punktów)**

Podać przykład takiego szeregu zbieżnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

o wyrazach dodatnich, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{a_n}{n}}$$

jest rozbieżny.

Zadanie **38** **(10 punktów)**

Dana jest taka funkcja ciągła $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, że

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx<\infty \qquad \text{oraz} \qquad \int_0^{\infty}(f(x))^2\,dx=\infty\,.$$

Dowieść, że

$$\int_0^{\infty}(f(x))^3\,dx=\infty\,.$$

Zadanie **39** **(10 punktów)**

Funkcja $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x)=\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^7t^7}\,dt\,.$$

Obliczyć $f'(7)$.

Zadanie **40** **(10 punktów)**

Obliczyć wartość całki

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{23}+x}\,.$$