KOLOKWIUM nr 4A, 7.06.2022, godz. 12:15–13:20

Zadanie **8a.** **(10 punktów)**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$$

podając wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt[3]{x-1}, \qquad x=t^3+1$$

i formalnie

$$dx=3t^2\,dt.$$

Ponadto $x=1$ odpowiada $t=0$, a $x=2$ odpowiada $t=1$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[1,\,2]$ odpowiada przedziałowi $t\in[0,\,1]$.

Otrzymujemy całkę oznaczoną (osobliwość na końcu przedziału znika):

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx=\int_0^1 \frac{t^3+1}{t}\cdot 3t^2\,dt=3\cdot\int_0^1 t^4+t\,dt=3\cdot\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^2}{2}\Bigg|_{t=0}^{1}\right)=$$

$$=3\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)=3\cdot\frac{2+5}{10}=3\cdot\frac{7}{10}=\frac{21}{10}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość 21/10.

Zadanie **9a.** **(10 punktów)**

Wyznaczyć obszar zbieżności zespolonego szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{4n}}{(-4)^n\cdot\sqrt[4]{n}}\,.$$

Podać w postaci kartezjańskiej liczby zespolone użyte do opisania obszaru zbieżności.

Rozwiązanie:

Stosując kryterium Cauchy'ego (można też zastosować kryterium d'Alemberta) otrzymujemy

$$\sqrt[n]{\left|\frac{z^{4n}}{(-4)^n\cdot\sqrt[4]{n}}\right|}=\frac{|z|^4}{4\cdot\sqrt[4]{\sqrt[n]{n}}}\to\frac{|z|^4}{4}\,.$$

Jeżeli $|z|^4/4<1$, czyli $|z|<\sqrt{2}$, to dany szereg potęgowy jest zbieżny.
Jeśli zaś $|z|^4/4>1$, czyli $|z|>\sqrt{2}$, to jest on rozbieżny.

Wobec tego promień zbieżności szeregu jest równy $\sqrt{2}$ i pozostaje zbadać zbieżność na okręgu ograniczającym koło zbieżności.

Niech więc $|z|=\sqrt{2}$. Wówczas dany szereg potęgowy przyjmuje postać

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(-4)^n \cdot \sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{\sqrt[4]{n}}\,,$$

gdzie $w=z^4/(-4)$ jest liczbą zespoloną o module 1.

Jeżeli $w\neq 1$, to powyższy szereg jest zbieżny zgodnie z uogólnieniem kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Natomiast dla $w=1$ otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\,,$$

a więc rozbieżny.

Pozostaje rozwiązać równanie $z^4/(-4)=1$, czyli $z^4=-4$.

Rozwiązania tego równania leżą na okręgu o środku w zerze i promieniu $\sqrt{2}$ w równych odległościach kątowych — mają argumenty $k\pi/4$ przy $k=1,3,5,7$.

Odpowiedź: Podany szereg jest zbieżny w kole o środku w zerze i promieniu $\sqrt{2}$ wraz z brzegiem oprócz czterech punktów: $\pm 1 \pm_2 i$.

Zadanie **10a.** **(10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_{-6}^{7} \frac{dx}{x^2+3}\,.$$

Uprościć wynik do postaci niezawierającej "arctg" – to uproszczenie jest istotną częścią zadania, bez której można otrzymać maksymalnie **6 punktów**.

Rozwiązanie:

Podstawiając $x=t\cdot\sqrt{3}$, czyli $t=x/\sqrt{3}$ i formalnie $dx=\sqrt{3}\cdot dt$ otrzymujemy:

$$\int_{-6}^{7} \frac{dx}{x^2+3} = \int_{-2\sqrt{3}}^{7/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}\cdot dt}{3t^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot \operatorname{arctg} x \Bigg|_{x=-2\sqrt{3}}^{7/\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{7}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}(-2\sqrt{3})\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{7}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}(2\sqrt{3})\right)\,.$$

Skorzystamy ze wzoru

$$\operatorname{arctg} x = \arg(1+xi)\,,$$

gdzie $\operatorname{arctg} x$ jest argumentem liczby zespolonej $1+xi$, jeśli przyjmiemy dodatkową umowę, że w tym wypadku argument ten pochodzi z przedziału $(-\pi/2,\, \pi/2)$.

Dostajemy

$$\operatorname{arctg}\frac{7}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}(2\sqrt{3})=\arg\left(1+\frac{7}{\sqrt{3}}i\right)+\arg\left(1+2\sqrt{3}i\right)=\arg\left(\left(1+\frac{7}{\sqrt{3}}i\right)\cdot\left(1+2\sqrt{3}i\right)\right)=$$

$$=\arg\left(1-14+\frac{7}{\sqrt{3}}i+2\sqrt{3}i\right)=\arg\left(-13+\frac{7}{\sqrt{3}}i+\frac{6}{\sqrt{3}}i\right)=\arg\left(-13+\frac{13}{\sqrt{3}}i\right)=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\,.$$

Argument liczby zespolonej nie jest jednoznaczny, znamy go z dokładnością do wielokrotności 2π.

Jednak dodanie nierówności

$$\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}\frac{7}{\sqrt{3}}<\frac{\pi}{2}$$

oraz

$$\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}(2\sqrt{3})<\frac{\pi}{2}$$

daje

$$\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\frac{7}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}(2\sqrt{3})<\pi\,,$$

skąd

$$\operatorname{arctg}\frac{7}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}(2\sqrt{3})=\frac{5\pi}{6}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka ma wartość $\frac{5\pi}{6\cdot\sqrt{3}}$.

KOLOKWIUM nr 4B, 8.06.2022, godz. 16:15–17:20

Zadanie **8b.** **(10 punktów)**

Obliczyć wartość całki oznaczonej

$$\int_1^2 x\cdot\sqrt[4]{x-1}\,dx$$

podając wynik w postaci liczby całkowitej lub ułamka nieskracalnego.

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie

$$t=\sqrt[4]{x-1}, \qquad x=t^4+1$$

i formalnie

$$dx=4t^3\,dt.$$

Ponadto $x=1$ odpowiada $t=0$, a $x=2$ odpowiada $t=1$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[1,\,2]$ odpowiada przedziałowi $t\in[0,\,1]$.

Otrzymujemy

$$\int_1^2 x\cdot\sqrt[4]{x-1}\,dx=\int_0^1\left(t^4+1\right)\cdot t\cdot 4t^3\,dt=4\cdot\int_0^1 t^8+t^4\,dt=4\cdot\left(\frac{t^9}{9}+\frac{t^5}{5}\Bigg|_{t=0}^{1}\right)=$$

$$=4\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{5}\right)=4\cdot\frac{5+9}{45}=4\cdot\frac{14}{45}=\frac{56}{45}\,.$$

Odpowiedź: Podana całka oznaczona ma wartość 56/45.

Zadanie **9b.** **(10 punktów)**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_3^\infty\frac{dx}{x\cdot(x+1)\cdot(x+6)}\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\ln p+v\cdot\ln q$, gdzie p, q są liczbami pierwszymi, a w, v liczbami wymiernymi.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x\cdot(x+1)\cdot(x+6)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+6}\,,$$

$$1=A\cdot(x+1)\cdot(x+6)+B\cdot x\cdot(x+6)+C\cdot x\cdot(x+1)\,.$$

Podstawiamy[1] za x wartości 0, -1 i -6 otrzymując odpowiednio

dla $x=0$ $\qquad 1=6\cdot A,$ skąd $A=1/6,$

dla $x=-1$ $\qquad 1=-5\cdot B,$ skąd $B=-1/5,$

dla $x=-6$ $\qquad 1=30\cdot C,$ skąd $C=1/30.$

Wobec tego[2]

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x\cdot(x+1)\cdot(x+6)}=\int_3^\infty \frac{1/6}{x}-\frac{1/5}{x+1}+\frac{1/30}{x+6}\,dx=$$

$$=\frac{1}{30}\cdot(5\cdot\ln|x|-6\cdot\ln|x+1|+\ln|x+6|)\Big|_{x=3}^{\infty}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{30}\cdot(5\cdot\ln|x|-6\cdot\ln|x+1|+\ln|x+6|)\right)\right)-\frac{1}{30}\cdot(5\cdot\ln 3-6\cdot\ln 4+\ln 9)=$$

$$=\frac{1}{30}\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^5\cdot(x+6)}{(x+1)^6}\right)-\frac{1}{30}\cdot(5\cdot\ln 3-12\cdot\ln 2+2\cdot\ln 3)=$$

$$=\frac{1}{30}\cdot\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{6}{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^6}\right)-\frac{1}{30}\cdot(7\cdot\ln 3-12\cdot\ln 2)=$$

$$=\frac{1}{30}\cdot\ln 1+\frac{12}{30}\cdot\ln 2-\frac{7}{30}\cdot\ln 3=\frac{2}{5}\cdot\ln 2-\frac{7}{30}\cdot\ln 3\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\frac{2}{5}\cdot\ln 2-\frac{7}{30}\ln 3$.

Uwaga: Całki

$$\int_3^\infty \frac{1}{x}\,dx,\qquad \int_3^\infty \frac{1}{x+1}\,dx,\qquad \int_3^\infty \frac{1}{x+6}\,dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x\to\infty}\ln|x|,\qquad \lim_{x\to\infty}\ln|x+1|,\qquad \lim_{x\to\infty}\ln|x+6|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty-\infty$.

Uwaga: Poprawne wykonanie przejścia granicznego jest istotną częścią zadania. Bez tego zadanie nie może być uzanane za rozwiązane nawet przy poprawnym wyniku liczbowym (czyli musi zostać ocenione na **co najwyżej 4 punkty**).

[1] Można też wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B i C, porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

[2] Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.

Zadanie **10b. (10 punktów)**

Dowieść, że szereg o wyrazach zespolonych
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{25}}{(n+i)^{27}}$$
jest zbieżny.

Rozwiązanie:

Stosując kryterium porównawcze do szeregu wartości bezwzględnych wyrazów danego szeregu otrzymujemy
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{n^{25}}{(n+i)^{27}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{25}}{|n+i|^{27}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{25}}{(n^2+1)^{27/2}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{25}}{(n^2+0)^{27/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\,,$$
skąd wynika, że szereg wartości bezwzględnych jest zbieżny.

Wobec tego na mocy kryterium zbieżności bezwzględnej dla szeregów zespolonych dany w zadaniu szereg jest zbieżny.

KOLOKWIUM nr 4S, 7.06.2022, godz. 12:15–13:20

Zadanie **11s. (10 punktów)**

Wyznaczyć wszystkie wartości rzeczywiste dodatnie parametru p, dla których

$$\int_1^2 \frac{x}{(x-1)^p}\,dx = 2\,.$$

Rozwiązanie:

Wykonujemy podstawienie $t=x-1$, $x=t+1$ i formalnie $dx=dt$.

Ponadto $x=1$ odpowiada $t=0$, a $x=2$ odpowiada $t=1$, przy czym zależność t od x jest monotoniczna. Stąd wynika, że przedział całkowania $x\in[1,2]$ odpowiada przedziałowi $t\in[0,1]$.

Otrzymujemy

$$\int_1^2 \frac{x}{(x-1)^p}\,dx = \int_0^1 \frac{t+1}{t^p}\,dt = \int_0^1 t^{1-p}+t^{-p}\,dt =$$

$$= \begin{cases} \left(\dfrac{t^{2-p}}{2-p}+\dfrac{t^{1-p}}{1-p}\right)\Bigg|_{t=0}^{1} = \dfrac{1}{2-p}+\dfrac{1}{1-p} & \text{dla} \quad p<1 \\ \left(\dfrac{t^{2-p}}{2-p}+\ln t\right)\Bigg|_{t=0}^{1} = \infty & \text{dla} \quad p=1 \\ \left(\dfrac{t^{2-p}}{2-p}+\dfrac{t^{1-p}}{1-p}\right)\Bigg|_{t=0}^{1} = \infty & \text{dla} \quad 1<p<2 \\ \left(\ln t+\dfrac{t^{1-p}}{1-p}\right)\Bigg|_{t=0}^{1} = \infty & \text{dla} \quad p=2 \\ \left(\dfrac{t^{2-p}}{2-p}+\dfrac{t^{1-p}}{1-p}\right)\Bigg|_{t=0}^{1} = \infty & \text{dla} \quad p>2 \end{cases}$$

Pozostaje rozwiązać równanie

$$\frac{1}{2-p}+\frac{1}{1-p}=2\,,$$

które kolejno przekształcamy do postaci:

$$1-p+2-p = 2\cdot(1-p)\cdot(2-p)\,,$$
$$3-2p = 4-6p+2p^2\,,$$
$$2p^2-4p+1=0\,,$$

co przy ograniczeniu $p<1$ prowadzi do $p=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Odpowiedź: Podana całka (niewłaściwa) ma wartość 2 dla $p=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Uwaga: Funkcja podcałkowa jest dodatnia, a mianownik mniejszy od 1. Zatem mianownik maleje wraz ze wzrostem p, a funkcja podcałkowa i cała całka rosną.

Morał 1: Całka nie może przyjmować tej samej skończonej wartości dla różnych p, więc zadanie może mieć co najwyżej jedno rozwiązanie.

Morał 2: Jeśli wyliczymy, że całka jest rozbieżna dla $p=1$, to stąd wynika, że jest rozbieżna dla wszystkich $p\geqslant 1$.

Zadanie **12S. (10 punktów)**
Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}\,.$$

Rozwiązanie:
Podstawiając we wzorze

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{n} \qquad x\in(-1,\,1]$$

wartość $x=-1/2$ otrzymujemy

$$\ln\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n\cdot 2^n}\,,$$

skąd

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2\,.$$

Odpowiedź: Dany szereg ma sumę $\ln 2$.