

ANALIZA 2, KOŁOKWIUM nr **3A**, 24.05.2022, godz. 12:15–13:20

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **5a.** (10 punktów)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+2) \cdot (x+7)}.$$

Doprowadzić wynik do postaci  $w \cdot \ln p + v \cdot \ln q$ , gdzie  $p, q$  są liczbami pierwszymi, a  $w, v$  liczbami wymiernymi.

Zadanie **6a.** (10 punktów)

Wyznaczyć wszystkie takie funkcję dwukrotnie różniczkowalną  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że

$$f''(x) = \cos^5 x \quad \text{dla każdego } x \in \mathbb{R}.$$

Zadanie **7a.** (10 punktów)

Dane są takie ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 9 \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 25.$$

Udowodnić jedną z poniższych nierówności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq 17 \quad \text{(wersja łatwiejsza za 6 punktów)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leq 15 \quad \text{(wersja trudniejsza za 10 punktów)}$$

**Wskazówka:** Skorzystać z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną.

ANALIZA 2, KOŁOKWIUM nr **3B**, 25.05.2022, godz. 16:15–17:20

Wykład: J. Wróblewski

PODCZAS KOŁOKWIUM NIE WOLNO UŻYWAĆ KALKULATORÓW

Zadanie **5b.** (10 punktów)

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_5^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+4) \cdot (x+10)}.$$

Doprowadzić wynik do postaci  $w \cdot \ln p + v \cdot \ln q$ , gdzie  $p, q$  są liczbami pierwszymi, a  $w, v$  liczbami wymiernymi.

Zadanie **6b.** (10 punktów)

Wyznaczyć taką liczbę wymierną  $a > 4$ , że

$$\int_2^4 \frac{dx}{x^2+1} = \int_4^a \frac{dx}{x^2+1}.$$

Zadanie **7b.** (10 punktów)

Wiedząc, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2,$$

obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego, w której na przemian występuje jeden wyraz dodatni i cztery ujemne:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \frac{1}{18} - \frac{1}{20} - \frac{1}{22} - \frac{1}{24} + \frac{1}{7} - \frac{1}{26} - \frac{1}{28} - \frac{1}{30} - \frac{1}{32} + \dots$$