KOLOKWIUM nr 3A, 24.05.2022, godz. 12:15–13:20

Zadanie **5a. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\cdot(x+2)\cdot(x+7)}\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\ln p+v\cdot\ln q$, gdzie p, q są liczbami pierwszymi, a w, v liczbami wymiernymi.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x\cdot(x+2)\cdot(x+7)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+7}\,,$$

$$1=A\cdot(x+2)\cdot(x+7)+B\cdot x\cdot(x+7)+C\cdot x\cdot(x+2)\,.$$

Podstawiamy[1] za x wartości 0, -2 i -7 otrzymując odpowiednio

dla $x=0$ $\quad 1=14\cdot A,$ skąd $A=1/14,$

dla $x=-2$ $\quad 1=-10\cdot B,$ skąd $B=-1/10,$

dla $x=-7$ $\quad 1=35\cdot C,$ skąd $C=1/35.$

Wobec tego[2]

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\cdot(x+2)\cdot(x+7)}=\int_2^{\infty} \frac{1/14}{x}-\frac{1/10}{x+2}+\frac{1/35}{x+7}\,dx=$$

$$=\frac{1}{70}\cdot(5\cdot\ln|x|-7\cdot\ln|x+2|+2\cdot\ln|x+7|)\Bigg|_{x=2}^{\infty}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{70}\cdot(5\cdot\ln|x|-7\cdot\ln|x+2|+2\cdot\ln|x+7|)\right)\right)-\frac{1}{70}\cdot(5\cdot\ln 2-7\cdot\ln 4+2\cdot\ln 9)=$$

$$=\frac{1}{70}\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^5\cdot(x+7)^2}{(x+2)^7}\right)-\frac{1}{70}\cdot(5\cdot\ln 2-14\cdot\ln 2+4\cdot\ln 3)=$$

$$=\frac{1}{70}\cdot\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{7}{x}\right)^2}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^7}\right)-\frac{1}{70}\cdot(-9\cdot\ln 2+4\cdot\ln 3)=$$

$$=\frac{1}{70}\cdot\ln 1+\frac{9}{70}\cdot\ln 2-\frac{4}{70}\cdot\ln 3=\frac{9}{70}\cdot\ln 2-\frac{2}{35}\cdot\ln 3\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\frac{9}{70}\cdot\ln 2-\frac{2}{35}\cdot\ln 3$.

[1] Można też wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B i C, porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

[2] Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.

Uwaga: Całki

$$\int_2^\infty \frac{1}{x}\,dx, \qquad \int_2^\infty \frac{1}{x+2}\,dx, \qquad \int_2^\infty \frac{1}{x+7}\,dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x\to\infty} \ln|x|, \qquad \lim_{x\to\infty} \ln|x+2|, \qquad \lim_{x\to\infty} \ln|x+7|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty-\infty$.

Uwaga: Poprawne wykonanie przejścia granicznego jest istotną częścią zadania. Bez tego zadanie nie może być uzanane za rozwiązane nawet przy poprawnym wyniku liczbowym (czyli musi zostać ocenione na **co najwyżej 4 punkty**).

Zadanie **6a. (10 punktów)**

Wyznaczyć wszystkie takie funkcję dwukrotnie różniczkowalne $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, że

$$f''(x)=\cos^5 x \quad \text{dla każdego} \quad x\in\mathbb{R}\,.$$

Rozwiązanie:

Korzystając z liczb zespolonych wyprowadzimy odpowiednią tożsamość trygonometryczną.

Przyjmijmy $z=\cos x+i\sin x$. Wówczas

$$z^n=\cos nx+i\sin nx, \qquad z^{-n}=\cos nx-i\sin nx, \qquad \cos nx=\frac{z^n+z^{-n}}{2}\,.$$

Zatem

$$\cos^5 x=\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^5=\frac{z^5+5z^3+10z+10z^{-1}+5z^{-3}+z^{-5}}{32}=\frac{\cos 5x}{16}+\frac{5\cdot\cos 3x}{16}+\frac{5\cdot\cos x}{8}\,.$$

W konsekwencji

$$f'(x)=\int \frac{\cos 5x}{16}+\frac{5\cdot\cos 3x}{16}+\frac{5\cdot\cos x}{8}\,dx=\frac{\sin 5x}{80}+\frac{5\cdot\sin 3x}{48}+\frac{5\cdot\sin x}{8}+C$$

oraz

$$f(x)=\int \frac{\sin 5x}{80}+\frac{5\cdot\sin 3x}{48}+\frac{5\cdot\sin x}{8}+C\,dx=-\frac{\cos 5x}{400}-\frac{5\cdot\cos 3x}{144}-\frac{5\cdot\cos x}{8}+Cx+D\,.$$

Odpowiedź: Szukane funkcje mają postać

$$f(x)=-\frac{\cos 5x}{400}-\frac{5\cdot\cos 3x}{144}-\frac{5\cdot\cos x}{8}+Cx+D\,.$$

Zadanie **7a. (10 punktów)**

Dane są takie ciągi (a_n) i (b_n) o wyrazach rzeczywistych dodatnich, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 9 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 25\,.$$

Udowodnić jedną z poniższych nierówności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leqslant 17 \qquad \textbf{(wersja łatwiejsza za 6 punktów)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leqslant 15 \qquad \textbf{(wersja trudniejsza za 10 punktów)}$$

Wskazówka: Skorzystać z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną.

Rozwiązanie:

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb a_n i b_n otrzymujemy

$$\sqrt{a_n \cdot b_n} \leqslant \frac{a_n + b_n}{2}\,.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{9}{2} + \frac{25}{2} = 17\,,$$

co kończy rozwiązanie łatwiejszej wersji zadania.

Z nierówności między średnią geometryczną i arytmetyczną liczb[3] $25a_n$ i $9b_n$ otrzymujemy

$$\sqrt{25a_n \cdot 9b_n} \leqslant \frac{25a_n + 9b_n}{2}\,,$$

czyli

$$\sqrt{a_n \cdot b_n} \leqslant \frac{25a_n + 9b_n}{30}\,.$$

---

[3] Ponieważ szeregi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 9 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 25$$

mają różne sumy, liczby a_n i b_n nie mogą być równe jednocześnie dla wszystkich n, a więc w nierównościach między średnimi dla liczb a_n i b_n pozostanie nieco "luzu". Aby uzyskać możliwie mocną nierówność, trzeba zastosować nierówności między średnimi do takich liczb, aby miały one szansę być jednocześnie równe. Ponieważ

$$\sum_{n=1}^{\infty} 25 \cdot a_n = 225 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot b_n = 225\,,$$

stosujemy nierówności między średnimi do liczb $25a_n$ i $9b_n$. Równie dobrze można zauważyć, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{9} = 1 \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{25} = 1$$

i zastosować nierówność między średnimi do liczb $a_n/9$ oraz $b_n/25$.

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5a_n}{6}+\frac{3b_n}{10}\right)=\frac{5}{6}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\frac{3}{10}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{5}{6}\cdot 9+\frac{3}{10}\cdot 25=\frac{15}{2}+\frac{15}{2}=15\,,$$

co kończy rozwiązanie trudniejszej wersji zadania.

KOLOKWIUM nr 3B, 25.05.2022, godz. 16:15–17:20

Zadanie **5b. (10 punktów)**

Obliczyć wartość całki niewłaściwej

$$\int_5^\infty \frac{dx}{x\cdot(x+4)\cdot(x+10)}\,.$$

Doprowadzić wynik do postaci $w\cdot\ln p+v\cdot\ln q$, gdzie p, q są liczbami pierwszymi, a w, v liczbami wymiernymi.

Rozwiązanie:

Rozkładamy funkcję podcałkową na sumę ułamków prostych:

$$\frac{1}{x\cdot(x+4)\cdot(x+10)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{x+10}\,,$$

$$1=A\cdot(x+4)\cdot(x+10)+B\cdot x\cdot(x+10)+C\cdot x\cdot(x+4)\,.$$

Podstawiamy[4] za x wartości 0, -4 i -10 otrzymując odpowiednio

dla $x=0$ $1=40\cdot A,$ skąd $A=1/40,$

dla $x=-4$ $1=-24\cdot B,$ skąd $B=-1/24,$

dla $x=-10$ $1=60\cdot C,$ skąd $C=1/60.$

Wobec tego[5]

$$\int_5^\infty \frac{dx}{x\cdot(x+4)\cdot(x+10)}=\int_5^\infty \frac{1/40}{x}-\frac{1/24}{x+4}+\frac{1/60}{x+10}\,dx=$$

$$=\frac{1}{120}\cdot(3\cdot\ln|x|-5\cdot\ln|x+4|+2\cdot\ln|x+10|)\Big|_{x=5}^{\infty}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{120}\cdot(3\cdot\ln|x|-5\cdot\ln|x+4|+2\cdot\ln|x+10|)\right)\right)-\frac{1}{120}\cdot(3\cdot\ln5-5\cdot\ln9+2\cdot\ln15)=$$

$$=\frac{1}{120}\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^3\cdot(x+10)^2}{(x+4)^5}\right)-\frac{1}{120}\cdot(3\cdot\ln5-10\cdot\ln3+2\cdot\ln3+2\cdot\ln5)=$$

$$=\frac{1}{120}\cdot\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{10}{x}\right)^2}{\left(1+\frac{4}{x}\right)^5}\right)-\frac{1}{120}\cdot(-8\cdot\ln3+5\cdot\ln5)=$$

$$=\frac{1}{120}\cdot\ln1+\frac{8}{120}\cdot\ln3-\frac{5}{120}\cdot\ln5=\frac{1}{15}\cdot\ln3-\frac{1}{24}\cdot\ln5\,.$$

Odpowiedź: Podana całka niewłaściwa ma wartość $\dfrac{\ln3}{15}-\dfrac{\ln5}{24}$.

---

[4] Można też wymnożyć wyrażenia po prawej stronie, ułożyć układ trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi A, B i C, porównując współczynniki przy jednakowych potęgach x'a, a następnie rozwiązać ten układ równań.

[5] Argumenty logarytmów są dodatnie w przedziale całkowania, więc moduły można pominąć.

Uwaga: Całki

$$\int\limits_5^\infty \frac{1}{x}\,dx, \qquad \int\limits_5^\infty \frac{1}{x+4}\,dx, \qquad \int\limits_5^\infty \frac{1}{x+10}\,dx$$

są rozbieżne, a granice

$$\lim_{x\to\infty} \ln|x|, \qquad \lim_{x\to\infty} \ln|x+4|, \qquad \lim_{x\to\infty} \ln|x+10|$$

są nieskończone, nie mogą się więc pojawić w rozwiązaniu w konfiguracji prowadzącej do nieoznaczoności $\infty-\infty$.

Uwaga: Poprawne wykonanie przejścia granicznego jest istotną częścią zadania. Bez tego zadanie nie może być uzanane za rozwiązane nawet przy poprawnym wyniku liczbowym (czyli musi zostać ocenione na **co najwyżej 4 punkty**).

Zadanie **6b. (10 punktów)**

Wyznaczyć taką liczbę wymierną $a>4$, że

$$\int\limits_2^4 \frac{dx}{x^2+1} = \int\limits_4^a \frac{dx}{x^2+1}\,.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\int\limits_2^4 \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \Big|_{x=2}^{4} = \operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 2$$

oraz

$$\int\limits_4^a \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \Big|_{x=4}^{a} = \operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} 4\,,$$

pozostaje znaleźć liczbę a spełniającą równanie

$$\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} 4 = \operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 2\,,$$

czyli

$$\operatorname{arctg} a = 2\cdot \operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 2\,.$$

Ponieważ $\operatorname{arctg} t$ jest argumentem liczby zespolonej $1+ti$, otrzymujemy

$$\operatorname{arctg} a = 2\cdot\operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 2 = 2\cdot\operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg}(-2) = 2\cdot\arg(1+4i)+\arg(1-2i) =$$

$$= \arg\Big((1+4i)^2\cdot(1-2i)\Big) + 2k\pi = \arg\left((-15+8i)\cdot(1-2i)\right)+2k\pi = \arg(1+38i)+2k\pi =$$

$$= \operatorname{arctg} 38 + 2k\pi\,,$$

skąd po uwzględnieniu nierówności[6]

$$0 < \operatorname{arctg} 38 < \frac{\pi}{2}$$

i

$$0 < 2 \cdot \operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 2 < \pi$$

wynika $k=0$ oraz $a=38$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia liczba $a=38$.

Zadanie **7b. (10 punktów)**

Wiedząc, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2\,,$$

obliczyć sumę permutacji szeregu anharmonicznego, w której na przemian występuje jeden wyraz dodatni i cztery ujemne:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{5}-\frac{1}{18}-\frac{1}{20}-\frac{1}{22}-\frac{1}{24}+\frac{1}{7}-\frac{1}{26}-\frac{1}{28}-\frac{1}{30}-\frac{1}{32}+\ldots$$

Rozwiązanie:

Ponieważ wyrazy szeregu dążą do zera, jego zbieżność (i sumę) można zbadać rozważając tylko co piątą sumę częściową. Otrzymujmy

$$S_{5n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^{4n} \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} - \sum_{i=n+1}^{4n} \frac{1}{2i}\,.$$

Skoro wiemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, definicja zbieżności szeregu daje

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \ln 2\,.$$

Ponadto oznaczając $f(x) = 1/(2x)$ otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{4n} \frac{1}{2i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{4n} \frac{1}{2i/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=n+1}^{4n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_1^4 f(x)\,dx =$$

$$= \int_1^4 \frac{dx}{2x} = \frac{\ln|x|}{2}\Bigg|_{x=1}^{4} = \frac{\ln 4}{2} - \frac{\ln 1}{2} = \frac{\ln 4}{2} = \ln 2\,.$$

[6]Korzystamy tu z nierówności

$$0 < \operatorname{arctg} t < \frac{\pi}{2}$$

dla $t>0$ oraz z nierówności $\operatorname{arctg} 4 > \operatorname{arctg} 2$.

Ostatecznie

$$\lim_{n\to\infty} S_{5n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} - \sum_{i=n+1}^{4n} \frac{1}{2i} \right) = \ln 2 - \ln 2 = 0\,.$$

Odpowiedź: Suma danego szeregu jest równa 0.