KOLOKWIUM nr 2A, 10.05.2022, godz. 12:15–13:00

Zadanie **3a.** **(10 punktów)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty} n^p\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{k}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{4n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{4n}}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$n^p\cdot\sum_{k=1}^{4n}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{k}}=\frac{n^p}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{k=1}^{4n}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{k}{n}}}=n^{p+1/2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{4n}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{k}{n}}}=n^{p+1/2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{4n}f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie

$$f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,.$$

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na $4n$ przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej, którą obliczamy wykonując podstawienie $t=\sqrt{x}$, czyli $x=t^2$ i formalnie $dx=2t\,dt$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{4n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int_0^2\frac{2t\,dt}{1+t}=2\cdot\int_0^2\frac{t+1-1}{1+t}\,dt=2\cdot\int_0^2 1-\frac{1}{1+t}\,dt=$$

$$=2\cdot(t-\ln(1+t))\Big|_{t=0}^{2}=2\cdot(2-\ln 3-0+\ln 1)=4-2\cdot\ln 3\,.$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+1/2}$ będzie równy 0, czyli dla $p=-1/2$.

Odpowiedź: Dla $p=-1/2$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $4-2\cdot\ln 3$.

Zadanie **4a. (10 punktów)**
Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n-2}\cdot x^n}{n}.$$

Rozwiązanie:
Stosujemy kryterium d'Alemberta do danego szeregu potęgowego traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{\sqrt{3n+1}\cdot x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{\sqrt{3n-2}\cdot x^n}\right| = \sqrt{\frac{3n+1}{3n-2}}\cdot|x|\cdot\frac{n}{n+1} \to |x|$$

przy $n\to\infty$.

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów danego szeregu potęgowego równej $|x|$.

Jeżeli $|x|<1$, to szereg jest zbieżny.
Jeżeli zaś $|x|>1$, to szereg jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności danego szeregu potęgowego jest równy 1.

Dla $x=1$ otrzymujemy szereg, który na mocy kryterium porównawczego jest rozbieżny:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3n-2}}{n} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3n-2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty\,.$$

Dla $x=-1$ otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3n-2}\cdot(-1)^n}{n},$$

który jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Aby to udowodnić, musimy zweryfikować prawdziwość trzech założeń tego kryterium.

1° W szeregu na przemian występują wyrazy dodatnie i ujemne – oczywiste.

2° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest zbieżny do zera.
Sprawdzamy to następująco:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n-2}}{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}} = \sqrt{0+0} = 0\,.$$

3° Ciąg wartości bezwzględnych wyrazów jest nierosnący.
Ten warunek jest najmniej oczywisty. Aby go udowodnić, powinniśmy wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{\sqrt{3n-2}}{n} \geqslant \frac{\sqrt{3n+1}}{n+1},$$

co kolejno jest równoważne nierównościom

$$\sqrt{3n-2}\cdot(n+1) \geqslant \sqrt{3n+1}\cdot n\,,$$

$$(3n-2)\cdot(n+1)^2 \geqslant (3n+1)\cdot n^2\,,$$

$$(3n-2)\cdot\left(n^2+2n+1\right) \geqslant 3n^3+n^2\,,$$

$$3n^3+4n^2-n-2 \geqslant 3n^3+n^2\,,$$

$$3n^2-n-2 \geqslant 0\,,$$

$$(n-1)\cdot(3n+2) \geqslant 0\,,$$

skąd wynika, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

W konsekwencji szereg dany w treści zadania jest zbieżny dla $x=-1$ na mocy kryterium Leibniza o szeregach naprzemiennych.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma przedział zbieżności $[-1,\,1)$.

Uwaga: Stosowanie kryterium d'Alemberta nie jest konieczne, ale jego unikanie nie wydaje się specjalnie praktyczne. Można bowiem wyobrazić sobie następujące rozwiązanie:
- Jakimś sposobem zgadujemy, że promień zbieżności jest równy 1.
- Dowodzimy jak w przedstawionym rozwiązaniu, że szereg jest rozbieżny dla $x=1$ i zbieżny dla $x=-1$.
- Przedstawiamy rozumowanie, z którego wynika, że jeśli szereg potęgowy jest rozbieżny dla $x=1$ i zbieżny dla $x=-1$, to jego promień zbieżności jest równy 1.

KOLOKWIUM nr 2B, 11.05.2022, godz. 16:15–17:00

Zadanie **3b. (10 punktów)**

Obliczyć granicę (ciągu)

$$\lim_{n\to\infty} n^p\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{1^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{2^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{3^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{4^2}}+\dots\right.$$
$$\left.\dots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{k^2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{(n-2)^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{(n-1)^2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n^2}}\right)$$

dla tak dobranej wartości rzeczywistej parametru p, aby granica ta była dodatnia i skończona.

Rozwiązanie:

Przekształcamy sumę występującą pod znakiem granicy:

$$n^p\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{k^2}}=\frac{n^p}{\sqrt[3]{n^2}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\sqrt[3]{\frac{k^2}{n^2}}}=n^{p+1/3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\sqrt[3]{\frac{k^2}{n^2}}}=n^{p+1/3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right),$$

gdzie

$$f(x)=\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\,.$$

Ponieważ funkcja f jest całkowalna jako funkcja ciągła, jej sumy Riemanna odpowiadające ciągowi podziałów przedziału całkowania na n przedziałów równej długości $1/n$ dążą do całki oznaczonej, którą obliczamy wykonując podstawienie $t=\sqrt[3]{x}$, czyli $x=t^3$ i formalnie $dx=3t^2\,dt$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x^2}}=\int_0^1\frac{3t^2\,dt}{1+t^2}=3\cdot\int_0^1\frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt=3\cdot\int_0^1 1-\frac{1}{1+t^2}\,dt=$$
$$=3\cdot(t-\operatorname{arctg} t)\Big|_{t=0}^{1}=3\cdot(1-\operatorname{arctg} 1-0+\operatorname{arctg} 0)=3-\frac{3\cdot\pi}{4}\,.$$

Powyższa wartość będzie granicą rozważanego w zadaniu ciągu, o ile wykładnik w wyrażeniu $n^{p+1/3}$ będzie równy 0, czyli dla $p=-1/3$.

Odpowiedź: Dla $p=-1/3$ dana w zadaniu granica ciągu jest równa $3-\frac{3\cdot\pi}{4}$.

Zadanie **4b. (10 punktów)**

Wyznaczyć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(pn)! \cdot x^n}{n! \cdot (2n)! \cdot n^n} \tag{1}$$

dla tak dobranej wartości całkowitej dodatniej parametru p, aby promień ten był dodatni i skończony.

Rozwiązanie:

Stosujemy kryterium d'Alemberta do szeregu (1) traktowanego jako szereg liczbowy z parametrem $x \neq 0$.

Otrzymujemy

$$\left|\frac{(pn+p)! \cdot x^{n+1}}{(n+1)! \cdot (2n+2)! \cdot (n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot (2n)! \cdot n^n}{(pn)! \cdot x^n}\right| =$$

$$= \frac{(pn+1) \cdot (pn+2) \cdot \ldots \cdot (pn+p) \cdot |x|}{(n+1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot (n+1)} =$$

$$= \frac{(pn+1) \cdot (pn+2) \cdot \ldots \cdot (pn+p)}{(n+1)^2 \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} \cdot \frac{|x|}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \to$$

$$\to \lim_{n\to\infty} \frac{(pn+1) \cdot (pn+2) \cdot \ldots \cdot (pn+p)}{(n+1)^2 \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} \cdot \frac{|x|}{e}.$$

Ponieważ w mianowniku wyrażenia pod znakiem granicy znajduje się wielomian czwartego stopnia, a w liczniku wielomian stopnia p, granica ta ma niezerową skończoną wartość tylko w przypadku równości tych stopni, czyli $p = 4$, co daje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(4n+1) \cdot (4n+2) \cdot (4n+3) \cdot (4n+4)}{(n+1)^2 \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)} \cdot \frac{|x|}{e} = \frac{64 \cdot |x|}{e}.$$

Tak więc zastosowanie kryterium d'Alemberta prowadzi do granicy ilorazów kolejnych wyrazów szeregu (1) równej $\frac{64 \cdot |x|}{e}$ dla $p = 4$.

Jeżeli $\frac{64 \cdot |x|}{e} < 1$, czyli $|x| < \frac{e}{64}$, to szereg (1) jest zbieżny.

Jeżeli zaś $\frac{64 \cdot |x|}{e} > 1$, czyli $|x| > \frac{e}{64}$, to szereg (1) jest rozbieżny.

Stąd wniosek, że promień zbieżności szeregu potęgowego (1) jest równy $\frac{e}{64}$.

Odpowiedź: Dany w zadaniu szereg potęgowy ma dla $p = 4$ promień zbieżności $\frac{e}{64}$.